

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PAVAGEAU James

1^{re} THÈSE. — « Contribution à une théorie électro-
magnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal.
Diffusion superficielle. »

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
« Interférométrie d'intensité. »

17 DEC. 1964
Soutenues le — devant la Commission d'examen.

M. KASTLER	<i>Président</i>
M. ARNULF	} <i>Examineurs</i>
M. MARÉCHAL	

Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1966

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Nom du Candidat : PAVAGEAU

Prénom : James

Date de la soutenance :

Numéro d'ordre : Série A, 4406, N° 5254

1

PAVAGEAU (James) — Contribution à une théorie électromagnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal. Diffusion superficielle. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 96 p., 23 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, Série A, 4406, N° 5254.

2

PAVAGEAU (James) — Contribution à une théorie électromagnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal. Diffusion superficielle. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 96 p., 23 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, Série A, 4406, N° 5254.

3

PAVAGEAU (James) — Contribution à une théorie électromagnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal. Diffusion superficielle. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 96 p., 23 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, Série A, 4406, N° 5254.

4

PAVAGEAU (James) — Contribution à une théorie électromagnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal. Diffusion superficielle. — *Paris*, Editions de la Revue d'Optique, 1966, 96 p. 23 fig.

Th. Sc. Phys. Paris, 1964, Série A, 4406, N° 5254.



THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

PAVAGEAU James

1^{re} THÈSE. — « Contribution à une théorie électromagnétique de la diffraction. Réseau à profil sinusoïdal. Diffusion superficielle. »

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
« Interférométrie d'intensité. »

Soutenues le

devant la Commission d'examen.

M.	KASTLER	<i>Président</i>
M.	ARNULF	} <i>Examineurs</i>
M.	MARÉCHAL	

Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale

3 et 5, boulevard Pasteur — 165, rue de Sèvres

PARIS (15^e)

1966

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieure et algèbre supérieure.	MARECHAL	T Optique théor. et Appli.
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparée.	KIRRMANN	T Théories chimiques.
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés.	CHADEFAUD	T Botanique.
PREVOST	T Chimie organique.	M ^{lle} LE BRETON	T Physiol. de la Nutrit.
WYART	T Minéralo. et Cristal.	LELONG	T Application de l'analyse à la géométrie.
TEISSIER	T Zoologie.	DEVILLERS	T Anatomie et Hist. Compar.
MANGENOT	T Biol. Végét. (Orsay).	EHRESMANN	T Topologie Algébrique.
AUGER	T Physique quantique et relativité.	FRANCON	T Physique (SPCN).
MONNIER	T Physiologie générale.	GLANGEAUD	T Géographie Phys. et Géol.
PIVETEAU	T Paléontologie.	GODEMENT	T Mathématiques (MGP).
ROCARD	T Physique (ENS).	PISOT	T Tech. Math. de la Phys.
CARTAN	T Mathématiques (ENS).	ROCH	T Géologie.
LAFFITTE	T Chimie générale.	SCHATZMANN	T Astrophysique.
FAVARD	T Géométrie supérieure.	TERMIER	T Géologie générale.
COULOMB	T Physique du globe.	ZAMANSKY	T Mathématiques générales.
M ^{lle} COUSIN	T Biol. animale (SPCN).	LENNUIER	T Physique (MGP).
CHRETIEN	T Chimie minérale.	RIZET	T Génétique (Orsay).
DRACH	T Zoologie.	ROUTHIER	T Géologie appliquée.
KASTLER	T Physique (ENS).	M ^{me} TONNELAT	T Physique théorique.
EPHROSSI	T Génétique.	DIXMIER	T Mathématiques (MPC).
RIVIÈRE	T Géol. SPCN et Sédimentologie (Orsay).	SOUCHAY	T Chimie générale.
GAUTHERET	T Biologie Vég. (PCB).	AIGRAIN	T Electrotechnique gén.
LUCAS R.	T Recherches Physiques.	BRUSSET	T Chimie systématique.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire.	M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
ARNULF	T Optique appliquée.	M ^{me} CHAIX	T Chimie biologique.
MORAND	T Physique Enseignement.	M ^{me} HUREL-PY	T Biologie végét. (PCB).
SOLEILLET	T Physique (PCB).	PIAUX	T Chimie (MPC).
FORTIER	T Mécanique Exp. des Fluides.	BRUN	T Mécanique théorique des fluides.
PETIT	T Biologie maritime.	LEDERER	T Chimie biolog. (Orsay).
QUENEY	T Météor. et dynamique atmosphérique.	M ^{me} DUBREIL	T Mathématiques (Agrég.).
GALLIEN	T Embryologie.	M ^{me} LE LONG	T Mathématiques II (ENS).
EICHHORN	T Botanique.	BELLAIR	T Géologie (SPCN).
DE CUGNAC	T Biologie Vég. (SPCN).	COTTE	T Physique électricité.
M ^{lle} CAUCHOIS	T Chimie Physique.	DUBOIS J. E.	T Chimie organique.
THELLIER	T Physique du globe.	LAMOTTE	T Zoologie (ENS).
L'HERITIER	T Biol. générale (Orsay).	MICHEL A.	T Chimie minérale (Orsay).
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay).	OLMER	T Energétique générale.
PONCIN	T Mécanique générale.	ROUAULT	T Electricité (Orsay).
DUBREIL	T Arithm. et Théorie des Nombres.	GAUTHIER	T Mécanique appliquée.
QUELET	T Chimie organique.	BARCHIEWITZ	T Chimie Physique.
CAGNIARD	T Géophysique appliquée.	BROSSEL	T Physique atomique.
CHAMPETIER	T Chimie macromolécul.	BUSER	T Physiologie comparée.
CUVILLIER	T Micropaléontologie.	CAMUS	T Physiologie Vég. (Orsay).
JUNG	T Géologie.	CASTAING	T Physique II Thermo (Orsay).
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électro.	CURIEN	T Minéralo. et cristal.
WIEMANN	T Chimie organ. et struc.	MOYSE	T Physiol. Végét. (Orsay).
JACQUINOT	T Spectroscopie et Phys. céleste (Orsay).	NOIROT	T Evolution des Etres Org.
VASSY	T Physique de l'Atmosph.	PANNETIER	T Chimie générale.
DESTOUCHES	T Théories Physiques.	POSSOMPS	T Zoologie.
AMIEL	T Chimie générale.	PULLMANN	T Chimie quantique.
HOCART	T Minéralo. et Cristal.	TEILLAC	T Physique Nucl. et Radioactivité (Orsay).
J. P. MATHIEU	T Physique Optique.	TONNELAT	T Biol. Physico-chim. (Orsay).
COUTEAUX	T Cytologie.	VILLE	T Econométrie.
MAY	T Zoologie (Orsay).	WILLEMART	T Chimie PCB.
CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie.	DODE	T Chimie (Orsay).
FELDMANN	T Biologie végét. marine.	FREYMAN	T Recherches Physiques.
GUINIER	T Physique des Solides (Orsay).	GUINOCHET	T Biol. Vég. SPCN (Orsay).
JOST	T Physiologie comparée.	ROLLET	T Chimie minérale.
FORTET	T Calcul des Probabilités et Phys. mathémat.	M ^{lle} JOSIEN	T Chimie SPCN.
SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral.	CHEVALLEY	T Géométrie algéb. et théorie des groupes.
CHOUARD	T Physiologie végétale.	ARNOULT	T Electronique (Orsay).
MALAVARD	T Aviation (Tech. Aéron.).	CHAPELLE	T Physique I (Orsay).
BRELOT	T Calcul diff. et Intégr.	DELANGÉ	T Mathématiques I (Orsay).
NORMANT	T Synthèse organique.	DENY	T Mathématiques Gén. (Orsay).
BENARD	T Chimie minérale.	GERMAIN	T Mécanique théor. des fluides.
BUVAT	T Botanique (ENS).	LUCAS G.	T Géologie.
DUGUE	T Statistiques Mathém.	ALLARD	T Chimie Physique.
SOULAIRAC	T Psychophysologie.	BERTHELOT	T Phys. des particules Fondamentales (Orsay).
ULRICH	T Physiol. Vég. Appliq.	BRICARD	T Météor. et Physique de l'Atmosphère.
		M ^{me} ALBE-FESSARD	T Psycho-physiol.
		FRIEDEL	T Physique des solides (Orsay).

(suite en dernière page)

CONTRIBUTION À UNE THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE LA DIFFRACTION. RÉSEAU À PROFIL SINUSOÏDAL. DIFFUSION SUPERFICIELLE

par James PAVAGEAU

INTRODUCTION

Si, dans les phénomènes de diffraction des ondes électromagnétiques, le problème purement géométrique de la position des franges ou des spectres a reçu depuis longtemps une réponse simple et en général satisfaisante, celui du calcul de la répartition de l'énergie dans les figures de diffraction s'avère beaucoup plus ardu. L'insuffisance, pour ce calcul, des théories scalaires n'est plus à démontrer. Le principe de Huygens-Fresnel, sous la forme scalaire proposée par Kirchhoff, souvent utilisé à cause de sa grande simplicité d'application, conduit à des conclusions qui se révèlent parfois en désaccord flagrant avec les résultats expérimentaux. R. P. Madden & J. Strong [1] l'ont constaté tout particulièrement avec des réseaux à intervalle fondamental du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. A. Maréchal & G. W. Stroke [2] ont observé un cas extrême où un réseau ne diffracte que dans un seul ordre alors que le principe de Huygens-Fresnel laisse croire à l'existence d'autres ondes. D'autre part, l'influence de la polarisation de l'onde incidente [2 à 6] ne peut manifestement pas être interprétée par une théorie scalaire.

Il apparaît donc indispensable de tenir compte du caractère vectoriel des ondes électromagnétiques et tout problème de diffraction consiste à déterminer, étant donné une certaine onde incidente, l'onde diffractée obéissant aux équations de Maxwell, compte tenu des conditions aux limites sur la surface diffractante. Mais il s'agit là d'un calcul généralement compliqué et c'est pourquoi n'ont guère été étudiés jusqu'ici que des cas très simples : écran à bord rectiligne, fente rectangulaire, ouverture circulaire et, dans le domaine des réseaux, les réseaux échelle [7 à 9, 37] souvent supposés parfaitement conducteurs.

La réalité physique s'écarte malheureusement de ces cas idéaux, trop schématisés. Le point de départ du présent travail fut une étude de la diffusion superficielle résultant d'un polissage imparfait d'une surface optique [10]. Par là se

trouvait posé le problème général de la diffraction par une surface réelle approximativement plane, auquel ressortissent, outre la diffusion optique, de nombreux phénomènes de perturbation par les inégalités du relief, la houle en mer, etc. dans la propagation des ondes hertziennes ou de radar. La difficulté majeure dans ce genre de problèmes réside dans la représentation mathématique de la surface diffusante. Son irrégularité, d'origine en général aléatoire, rend impossible une représentation analytique simple. On n'a jusqu'ici envisagé que des cas particuliers où les défauts sont cylindriques [11, 12] ou sphériques [13]. Il ne semble pas que des recherches dans ce sens puissent aboutir à des conclusions valables dans les cas plus généraux. Par contre, la représentation d'une surface irrégulière par une intégrale de Fourier paraît pratiquement possible.

Aussi avons-nous été amené à étudier la diffraction par un réseau à profil sinusoïdal. G. W. Stroke, reprenant et élargissant un travail de Lord Rayleigh [14], a déjà considéré ce problème et l'a mis rigoureusement en équations, mais en supposant le réseau parfaitement conducteur [15]. Nous nous sommes proposé de refaire la mise en équations dans le cas général où le réseau est tracé sur un milieu d'indice n , réel ou complexe. De plus, étant donné nos objectifs, nous avons orienté ses sillons d'une manière quelconque par rapport au plan d'incidence. D'autre part, à l'opposé des spectroscopistes pour qui le calcul numérique de la répartition de l'énergie constitue le but ultime et qui le confient à une machine à calculer, nous avons tenté, aussi souvent que possible, une résolution littérale. Celle-ci n'a pu être obtenue qu'au prix d'hypothèses simplificatrices ; notre étude est surtout consacrée au réseau d'amplitude faible par rapport à la longueur d'onde. Pour alléger le langage, mise en équations et résolution sont effectuées, sauf spécification contraire, dans le cas où le milieu matériel est un diélectrique transparent, donc son indice de réfraction réel, étant entendu, comme il est bien connu, que les solutions algébriques s'appliquent ensuite également aux milieux non transparents pour lesquels l'indice est complexe. Quelques expériences ont permis de vérifier l'essentiel de nos conclusions.

Dans la seconde partie, nous considérons un réseau de profil quelconque. L'analyse harmonique de sa surface permet d'établir une loi approchée donnant les champs diffractés dans les différents ordres et de calculer l'influence des défauts de tracé de ce réseau.

Enfin, la troisième partie ramène notre étude à son objet initial, la diffusion superficielle dont le mécanisme et les particularités se comprennent alors aisément à la lumière des résultats précédents.

PREMIÈRE PARTIE

RÉSEAU À PROFIL SINUSOÏDAL

I. Mise en équations générale

1. Position du problème. Expression des champs diffractés. — Pour les raisons que nous venons d'exposer, nous supposons que le réseau est tracé sur un milieu diélectrique homogène, isotrope, parfaitement transparent, d'indice n réel par conséquent.

Ce milieu est limité par une surface cylindrique S à directrice sinusoïdale (fig. 1). Choisissons un trièdre rectangle $Oxyz$ de façon que le plan xOy constitue le plan moyen du réseau, l'axe Oz étant orienté vers le vide. Nous écrivons l'équation de S , $z = h \cos(\mu x + \nu y)$, c'est-à-dire que nous supposons quelconque l'orientation des sillons du réseau par rapport au plan d'incidence zOx de l'onde plane

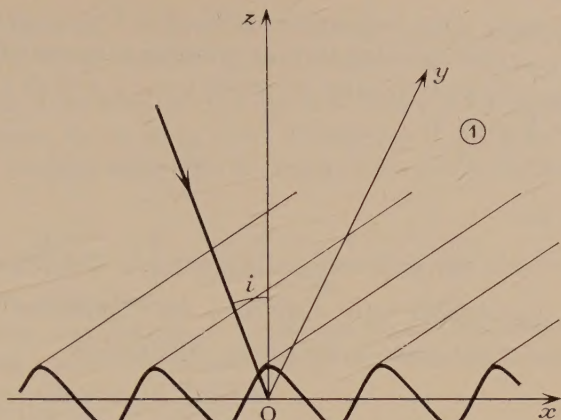


FIG. 1.

(I.1) $\vec{C}^i = \vec{E}^i \exp[-i k (x \sin i - z \cos i)]$
provenant du vide et reçu par le réseau sous l'incidence moyenne i .

Nous utilisons ici la notation complexe usuelle du champ électrique d'une onde électromagnétique où nous sous-entendons la phase fonction du temps et où k désigne le nombre d'ondes $2\pi/\lambda$, λ étant la longueur d'onde dans le vide.

Le champ incident donne naissance, sur le réseau, à des champs dont nous chercherons des expressions sous forme de spectres d'ondes planes

$$(I.2) \quad \begin{aligned} \vec{C}^r &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{E}_p^r \exp[-i k (\alpha_p^r x + \beta_p^r y + \gamma_p^r z)], \\ \vec{C}^t &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{E}_p^t \exp[-i k (\alpha_p^t x + \beta_p^t y + \gamma_p^t z)], \end{aligned}$$

les indices r et t servant à distinguer les champs respectivement diffractés par réflexion et par transmission et p étant un nombre entier.

La validité d'une telle représentation, contestée par B. A. Lippman [16], a été clairement prouvée par R. Petit [8] pour un réseau parfaitement conducteur à sillons normaux au plan d'incidence. Adaptons la démonstration au problème présent, ce qui déterminera, de plus, les coefficients α , β et γ .

Le champ total vérifie l'équation de Helmholtz. Puisque le champ incident $\vec{C}^i$ obéit déjà à cette équation, chacun des champs diffractés $\vec{C}^r$ et $\vec{C}^t$ la vérifie également. Donc

$$\Delta \vec{C}(x, y, z) + k^2 N^2 \vec{C}(x, y, z) = 0.$$

Nous désignons, d'une manière générale, par N l'indice du milieu dans lequel se trouve le point (x, y, z) . N peut donc prendre les valeurs 1 ou n suivant que l'on se place dans le vide ou dans le milieu matériel.

Les ondes que nous considérons étant supposées illimitées, le problème physique reste fondamentalement le même si nous opérons une translation d'axes égale au pas du réseau suivant la direction normale aux sillons. Seule est affectée la phase de l'onde incidente par l'intermédiaire du facteur $\exp(-i k x \sin i)$. Aussi, opérons le changement de notation $\vec{C}(x, y, z) = \vec{C}'(x, y, z) \exp(-i k x \sin i)$,

de façon à faire apparaître la fonction $\vec{C}'(x, y, z)$ invariante dans la translation considérée. Ce champ devant présenter la même périodicité que le réseau est donc fonction de la variable composée $\mu x + \nu y$ et de z . On peut le développer en série de Fourier :

$$\vec{C}'(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{C}_p''(z) \exp[-i p (\mu x + \nu y)].$$

D'où

$$\vec{C}(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{C}_p''(z) \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + p \frac{\mu}{k} \right) x + p \frac{\nu}{k} y \right] \right\}.$$

Introduisons cette expression dans l'équation de Helmholtz. Chaque coefficient $\vec{C}_p''(z)$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \vec{C}_p''(z)}{dz^2} + k^2 \gamma_p^2 \vec{C}_p''(z) = 0,$$

avec

$$(I.3) \quad \gamma_p^2 = N^2 - \left(\sin i + p \frac{\mu}{k} \right)^2 - p^2 \frac{\nu^2}{k^2}.$$

La solution est, en général,

$$(I.4) \quad \vec{C}_p''(z) = \vec{E}_p' \exp(i k \gamma_p z) + \vec{E}_p'' \exp(-i k \gamma_p z)$$

et le champ diffracté total s'écrit finalement

$$(I.5) \quad \vec{C}(x, y, z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\vec{E}_p' \exp(i k \gamma_p z) + \vec{E}_p'' \exp(-i k \gamma_p z)] \times \\ \times \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + p \frac{\mu}{k} \right) x + p \frac{\nu}{k} y \right] \right\}.$$

Nous vérifions bien que le champ diffracté total est représentable par un spectre d'ondes planes. Les expressions (I.2) sont, par conséquent, légitimes et l'identification avec (I.5) donne

$$(I.6) \quad \alpha_p^r = \alpha_p^t = \sin i + (p \mu/k), \quad \beta_p^r = \beta_p^t = p \nu/k.$$

Les indices r et t devenant superflus, nous noterons simplement ces coefficients α_p et β_p .

Les coefficients γ_p se déduisent de (I.3).

a) Si $\gamma_p^2 > 0$, γ_p est un nombre réel et l'onde correspondante est plane, homogène. Bien entendu, dans (I.4) seule une série de termes possède une réalité physique, ceux traduisant une propagation dans le sens des z croissants dans le vide, des z décroissants dans le milieu matériel. Nous devons donc choisir les déterminations

$$(I.7) \quad \gamma_p^r = \sqrt{1 - \alpha_p^2 - \beta_p^2}, \quad \gamma_p^t = -\sqrt{n^2 - \alpha_p^2 - \beta_p^2}.$$

b) Si $\gamma_p^2 < 0$, γ_p est purement imaginaire et l'onde correspondante n'est pas homogène. Des considérations physiques évidentes conduisent à l'adoption des déterminations

$$(I.8) \quad \gamma_p^r = -i \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2 - 1}, \quad \gamma_p^t = i \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2 - n^2},$$

nécessaires pour que les ondes considérées soient évanescentes, c'est-à-dire que leur amplitude subisse une décroissance exponentielle quand on s'éloigne du plan moyen du dioptre $z = 0$.

c) Si $\gamma_p^2 = 0$, la solution (I.4) ne s'applique plus et, dans ce cas particulier,

$\vec{C}_p''(z) = \vec{E}_p + \vec{A} z$. Mais la constante d'intégration $\vec{A}$ doit être nulle, sinon les champs ne seraient pas bornés, de sorte que la forme (I.5) reste valable.

En conclusion, nous pouvons donc adopter, quel que soit l'ordre p , les expressions (I.2) des champs diffractés, les α_p et β_p étant donnés par (I.6) et les γ_p peuvent prendre, suivant les cas, les acceptions (I.7) ou (I.8). Naturellement, en particulier, $\alpha_0 = \sin i$,

(I.9) $\gamma_0^r = \cos i$, $\gamma_0^t = -\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = -n \cos r$,
si r est l'angle moyen de réfraction et nous utiliserons désormais ces notations par souci d'homogénéité et de concision.

Pour exprimer les conditions aux limites, nous aurons besoin des champs magnétiques. Ils sont reliés aux champs électriques par les équations de Maxwell qui s'écrivent, dans le système d'unités de Gauss,

$$(I.10) \quad \text{rot } \vec{C}_p = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_p}{\partial t},$$

$$(I.11) \quad \text{rot } \vec{H}_p = \frac{N^2}{c} \frac{\partial \vec{C}_p}{\partial t},$$

c étant la vitesse de propagation dans le vide [pour l'application de ces relations il faut rétablir le facteur $\exp(i k c t)$ que nous avons sous-entendu dans les expressions (I.2)].

D'autre part, ces champs étant à flux conservatif, $\text{div } \vec{C}_p = 0$, $\text{div } \vec{H}_p = 0$, ce qui donne, entre les amplitudes de leurs composantes suivant les axes Ox , Oy , Oz , les relations

$$(I.12) \quad E_{px} \alpha_p + E_{py} \beta_p + E_{pz} \gamma_p = 0,$$

$$(I.13) \quad H_{px} \alpha_p + H_{py} \beta_p + H_{pz} \gamma_p = 0.$$

2. Conditions aux limites. — L'expression générale des champs étant établie, il s'agit maintenant, afin de déterminer l'amplitude de chaque onde diffractée, de traduire les conditions aux limites, c'est-à-dire la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique totaux sur la surface du réseau. Si $\vec{n}$ désigne le vecteur unitaire normal à cette surface, orienté vers le vide,

$$(I.14) \quad \vec{n} \wedge (\vec{C}^i + \vec{C}^r - \vec{C}^t) = 0,$$

$$(I.15) \quad \vec{n} \wedge (\vec{H}^i + \vec{H}^r - \vec{H}^t) = 0,$$

pour $z = h \cos(\mu x + \nu y)$, avec

$$\vec{n} = \frac{[(\vec{u}_x \mu + \vec{u}_y \nu) h \sin(\mu x + \nu y) + \vec{u}_z]}{\sqrt{1 + (\mu^2 + \nu^2) h^2 \sin^2(\mu x + \nu y)}},$$

$\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ étant les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy et Oz .

Pour développer ces équations de passage, nous distinguerons deux cas de polarisation : champ électrique incident normal, puis parallèle au plan d'incidence.

1. Champ électrique incident normal au plan d'incidence. — Eliminons les champs magnétiques, grâce à la relation (I.10),

$$\mathcal{H}_x^i = \mathcal{C}^i \gamma_0^r, \quad \mathcal{H}_y^i = 0, \quad \mathcal{H}_z^i = \mathcal{C}^i \alpha_0$$

et, pour $\widetilde{\mathcal{H}}_p^r$ et $\widetilde{\mathcal{H}}_p^t$,

$$(I.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{px} &= \mathcal{E}_{pz} \beta_p - \mathcal{E}_{py} \gamma_p, \\ \mathcal{H}_{py} &= \mathcal{E}_{px} \gamma_p - \mathcal{E}_{pz} \alpha_p, \quad \mathcal{H}_{pz} = \mathcal{E}_{py} \alpha_p - \mathcal{E}_{px} \beta_p. \end{aligned}$$

Les équations vectorielles (I.14) et (I.15) conduisent aux quatre équations scalaires indépendantes

$$(I.17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nu h \sin(\mu x + \nu y) (\mathcal{E}_z^r - \mathcal{E}_z^t) - \mathcal{E}^i + \mathcal{E}_y^r - \mathcal{E}_y^t = 0, \\ & \mathcal{E}_x^r - \mathcal{E}_x^t - \mu h \sin(\mu x + \nu y) (\mathcal{E}_z^r - \mathcal{E}_z^t) = 0, \\ & \nu h \sin(\mu x + \nu y) \left[\mathcal{E}^i \alpha_0 + \sum_p (\mathcal{E}_{py}^r \alpha_p - \mathcal{E}_{px}^r \beta_p) - \sum_p (\mathcal{E}_{py}^t \alpha_p - \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{E}_{px}^t \beta_p) \right] - \sum_p (\mathcal{E}_{px}^r \gamma_p - \mathcal{E}_{pz}^r \alpha_p) + \sum_p (\mathcal{E}_{px}^t \gamma_p - \mathcal{E}_{pz}^t \alpha_p) = 0, \\ & \mathcal{E}^i \gamma_0^r + \sum_p (\mathcal{E}_{pz}^r \beta_p - \mathcal{E}_{py}^r \gamma_p) - \sum_p (\mathcal{E}_{pz}^t \beta_p - \mathcal{E}_{py}^t \gamma_p) - \\ & \quad - \mu h \sin(\mu x + \nu y) \left[\mathcal{E}^i \alpha_0 + \sum_p (\mathcal{E}_{py}^r \alpha_p - \mathcal{E}_{px}^r \beta_p) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_p (\mathcal{E}_{py}^t \alpha_p - \mathcal{E}_{px}^t \beta_p) \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

pour $z = h \cos(\mu x + \nu y)$.

En explicitant les champs sur la surface du réseau, apparaissent des facteurs de forme générale $\exp[\mathbf{i} a \cos(\mu x + \nu y)]$ que nous développerons en séries de Fourier

$$(I.18) \quad \exp[\mathbf{i} a \cos(\mu x + \nu y)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathbf{i}^q \mathbf{J}_q(a) \exp[\mathbf{i} q(\mu x + \nu y)],$$

où $\mathbf{J}_q$ est la fonction de Bessel de première espèce.

Les équations (I.17) doivent être vérifiées quels que soient x et y . Par conséquent, après

la simplification générale par

$$\exp(-\mathbf{i} k x \sin i) / \sqrt{1 + (\mu^2 + \nu^2) h^2 \sin^2(\mu x + \nu y)},$$

la transformation

$$\sin(\mu x + \nu y) = -\frac{1}{2} \mathbf{i} [\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\mu x + \nu y)} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}(\mu x + \nu y)}],$$

l'application de la relation de récurrence

$$\mathbf{J}_{m+1}(a) + \mathbf{J}_{m-1}(a) = 2(m/a) \mathbf{J}_m(a),$$

nous identifions à 0 le coefficient des termes en $\exp[\mathbf{i} m(\mu x + \nu y)]$. D'où, en n'explicitant pas les termes en E^t , analogues à ceux en E^r ,

(I.19)

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(-E_{py}^r + E_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) \mathbf{i}^{-m-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = E^i \mathbf{i}^m \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r),$$

$$(I.20) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(E_{px}^r - E_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) \mathbf{i}^{-m-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = 0,$$

$$(I.21) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[-E_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + E_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + E_{pz}^r \alpha_p \right] \times \\ \times \mathbf{i}^{-m-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = E^i m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \mathbf{i}^m \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r),$$

$$(I.22) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[E_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - E_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + E_{pz}^r \beta_p \right] \times \\ \times i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = -E^i \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0^r}{\gamma_0^r} \right) i^m J_m(k h \gamma_0^r).$$

Ces équations, jointes aux relations (I.12) appliquées aux E^r et E^t , constituent un système d'équations linéaires infini, puisque l'indice m peut prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives, entre une infinité d'inconnues : les composantes des champs diffractés par réflexion et par réfraction dans tous les ordres p .

2. *Champ magnétique incident normal au plan d'incidence.* — Le traitement de ce cas de polarisation sera, au point de vue formel, très voisin de celui adopté dans le cas précédent, puisque les conditions aux limites restent les mêmes. Afin de profiter au mieux de cette analogie et puisque $\vec{\mathcal{H}}^i$ occupe la position précédemment occupée par $\vec{\mathcal{E}}^i$, il est avantageux de choisir maintenant les champs magnétiques comme inconnues principales, les champs électriques étant éliminés grâce à la relation (I.11). Or, les conditions (I.14) et (I.15) sont parfaitement symétriques en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$, et les équations de Maxwell (I.10) et (I.11) presque symétriques, au facteur $-N^2$ près. D'où la conclusion immédiate :

la condition (I.15) conduira à deux équations analogues à (I.19) et (I.20) où les E sont remplacés par les H correspondants,

la condition (I.14), compte tenu de (I.11), mènera à deux équations analogues à (I.21) et (I.22) où il suffit de remplacer les E par les $-H/N^2$ correspondants.

Rappelons que nous avons désigné par N soit 1, soit n , indices du vide ou du milieu matériel. Par conséquent,

(I.23)

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(-H_{py}^r + H_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = H^i i^m J_m(k h \gamma_0^r),$$

$$(I.24) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(H_{px}^r - H_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = 0,$$

$$(I.25) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[-H_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + H_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + H_{pz}^r \alpha_p \right] \times \\ \times i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \frac{1}{n^2} \sum^t \dots = H^i m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0^r}{\gamma_0^r} i^m J_m(k h \gamma_0^r),$$

$$(I.26) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[H_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - H_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + H_{pz}^r \beta_p \right] \times \\ \times i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \frac{1}{n^2} \sum^t \dots = -H^i \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0^r}{\gamma_0^r} \right) i^m J_m(k h \gamma_0^r).$$

Avec les relations (I.13), ces équations traduisent rigoureusement le problème.

3. **Méthodes de résolution.** — Dans l'un ou l'autre cas de polarisation, nous aboutissons à un système infini d'équations linéaires entre un nombre infini d'inconnues. On est, depuis longtemps, habitué à considérer de tels systèmes

depuis que Fourier [17] a instauré l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés, méthode qui consiste à chercher la solution d'une équation différentielle sous la forme d'une série à coefficients inconnus. Il n'est pas douteux que le problème présente, en général, une grande complexité, mais il est ici simplifié par des considérations physiques. L'expérience montre, avec les réseaux usuels, que l'énergie lumineuse se trouve pratiquement concentrée en un petit nombre de spectres d'ordre peu élevé. N'oublions pas, de plus, qu'à partir d'un certain ordre, les ondes sont évanescentes. Or, le plus souvent, on s'intéresse uniquement aux ondes ordinaires, diffractées à l'infini. Le problème réel, qui se pose dans la pratique, consiste donc à déterminer un nombre limité d'inconnues, les premières dans une suite infinie dont les termes vont en décroissant, tout au moins à partir d'un rang peu élevé. Ces considérations suggèrent l'emploi de ce que F. Riesz [18] a appelé la méthode des réduites utilisée déjà par Fourier [17], Hill [19] dans des problèmes du même genre et recommandée par G. W. Stroke ([15] p. 370) pour l'étude des réseaux parfaitement conducteurs : on résout un système partiel de n équations comportant les n premières inconnues, présumées les plus importantes, puis de $n + 1$ inconnues à $n + 1$ équations, etc. jusqu'à ce que les valeurs successives trouvées pour chaque inconnue ne diffèrent plus sensiblement entre elles. On admet alors que la dernière valeur trouvée diffère également peu de la solution.

Cette méthode et la convergence qu'elle sous-entend posent de graves objections mathématiques qui, depuis Poincaré [20], n'ont cessé d'être débattues [21 à 24] mais qui ne nous arrêteront pas ici. Etant donné la nature physique du problème envisagé, la convergence ne fait pas de doute (notons, au passage, que l'on ne saurait être aussi catégorique au sujet de cas trop schématisés tels que celui du réseau échelle à arêtes supposées parfaitement vives). Par contre, une question importante est celle de la rapidité de cette convergence et de l'estimation de l'erreur commise en réduisant le système à un certain nombre d'équations et d'inconnues. Au strict point de vue mathématique, aucun critère simple n'apparaît pour répondre à cette question. Mais nous disposons d'un critère physique évident : la solution doit vérifier le principe de conservation de l'énergie. Par conséquent, l'écart à cette loi de la solution approchée trouvée permet d'apprécier la qualité de cette solution. Bien entendu, il s'agit là d'un critère à posteriori mais il présente l'avantage d'être simple et d'avoir une signification physique immédiate, d'un intérêt indéniable.

Appliquons donc le principe de la conservation de l'énergie à un cylindre infini de génératrices parallèles à Oz et s'appuyant sur une surface unité dans le plan moyen du réseau. L'apport de puissance à ce volume par l'onde incidente est $(c/8\pi)|E^i|^2\gamma_0^r$, tandis que les ondes diffractées réelles emportent $(c/8\pi)|E_p^r|^2\gamma_p^r$ ou $-(c/8\pi)|E_p^t|^2\gamma_p^t$. Puisque nous considérons un réseau infini et une onde incidente illimitée, la contribution énergétique des ondes évanescentes est nulle. Cela ne signifie nullement, comme inclinent à le penser certains auteurs, que ces ondes ne transportent aucune énergie et n'ont pas d'énergie réelle. De nombreux expérimentateurs les ont mises indubitablement en évidence, aussi bien celles engendrées par la réflexion totale [25, 26] que celles produites par diffraction ([27], [15] p. 378). Mais le flux d'énergie qu'elles font sortir du volume que nous

considérons est exactement compensé par le flux qu'elles y font pénétrer. Par conséquent, nous n'avons pas à en tenir compte dans le bilan énergétique et

$$(I.27) \quad |E^i|^2 \gamma_0^r = \sum_{\substack{p \\ \text{(ordres réels)}}} (|E_p^r|^2 \gamma_p^r - |E_p^t|^2 \gamma_p^t).$$

Cette limitation aux ondes réelles rend donc extrêmement simple l'application de ce critère de précision.

Remarquons qu'une autre méthode que celle des réduites pourrait être envisagée, une méthode matricielle [28]. En effet, disposant d'un système d'équations linéaires $[a] [x] = [y]$, nous nous proposons seulement de déterminer les k premières inconnues. Ecrivons la matrice $[a]$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & | & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & | & a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \hline \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1k} & | & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & | & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

et, de même,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \hline y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}.$$

Le système d'équations s'écrit

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix},$$

d'où il est facile d'éliminer maintenant X_2 , c'est-à-dire toutes les inconnues $x_1, \dots, x_n$ qui ne nous intéressent pas :

$$(I.28) \quad (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) X_1 = Y_1 - A_2 A_4^{-1} Y_2.$$

Ce procédé, qui s'applique sans difficulté dans le cas où le nombre initial n d'équations est fini, s'étend au cas de notre système infini, car les matrices infinies $A_2 A_4^{-1} A_3$ et $A_2 A_4^{-1}$ ont certainement un sens.

Le problème se trouve donc ramené à la résolution d'un système fini d'équations linéaires. Mais les coefficients comportent des matrices infinies. Est-ce à dire que la difficulté a été seulement déplacée et que la méthode matricielle n'offre aucun intérêt ? Avant de répondre trop hâtivement, remarquons que la méthode des réduites, qui consisterait à écrire

$$(I.29) \quad A_1 X_1 = Y_1,$$

revient, si l'on compare (I.28) et (I.29), à assimiler les coefficients exacts $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ et les seconds membres exacts $Y_1 - A_2 A_4^{-1} Y_2$ aux valeurs approchées A_1 et Y_1 .

Quelle est la conclusion pratique ? Bien entendu, la méthode matricielle est

inapplicable, en toute rigueur, car nous ne savons pas calculer les matrices infinies. Cependant, s'il est possible d'en trouver des valeurs approchées, un progrès est réalisé sur la méthode des réduites. A défaut même de valeurs approchées des matrices infinies, la connaissance des bornes supérieures permettrait d'estimer l'erreur sur chaque coefficient du système réduit (I.29) et, par conséquent, l'erreur sur la solution. Au cours des résolutions littérales que nous exposerons dans les prochains chapitres, nous n'exploiterons pas cette remarque, car les calculs sont inextricables. Cependant, nous avons tenu à la signaler car elle pourrait éventuellement être utilisée lors d'un calcul numérique sur ordinateur.

Quelle que soit la méthode adoptée, notons encore qu'il est toujours loisible de transformer le système d'équations auquel nous sommes parvenu, afin de le mettre sous une forme plus pratique. Notamment, il peut être avantageux d'opérer une triangularisation, c'est-à-dire d'opérer une transformation linéaire changeant la matrice quelconque A des coefficients en une matrice triangulaire A' , soit par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt [22], soit par celui de Kotteritsch [29] qui exprime les nouveaux coefficients sous les formes

$$(I.30) \quad a'_{kn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix}, \quad y'_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{k,n-1} & y_k \end{vmatrix}.$$

Ce procédé ne fait intervenir que des déterminants finis et conduit au système d'équations

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ \dots \end{bmatrix},$$

plus simple que le précédent et qui se prête beaucoup mieux à l'application des méthodes que nous avons décrites. Notamment, dans (I.28) on aurait maintenant $A'_3 = 0$, d'où l'équation matricielle

$$A'_1 X_1 = Y'_1 - A'_2 A'^{-1}_4 Y'_2.$$

Si on adopte la méthode des réduites, cette équation se simplifie en $A'_1 X_1 = Y'_1$ et la relation devient explicite. La dernière inconnue $x_k = y'_k/a'_{kk}$, puis

$$x_{k-1} = (y'_{k-1} - a'_{k-1,k} x_k)/a'_{k-1,k-1}, \dots$$

Encore une fois, ce procédé est particulièrement intéressant pour un traitement numérique sur ordinateur puisque celui-ci peut calculer rapidement les déterminants (I.30). La suite de la résolution ne soulève plus aucune difficulté.

La discussion que nous venons de développer sur les méthodes d'approximations nécessaires à la résolution ne doit pas faire oublier que les équations (I.19) à (I.26) sont parfaitement rigoureuses et ont été établies sans hypothèse restrictive sur le pas et l'amplitude du profil sinusoïdal.

Dans nos équations, aucune discrimination formelle n'est faite entre les ondes réelles et les ondes évanescentes. Rappelons que si l'onde d'ordre p est réelle, γ_p prend l'acception (I.7) et $J_{m+p}(k h \gamma_p)$ est une fonction de Bessel de première espèce ; si l'onde est évanescence, γ_p a la valeur imaginaire (I.8) et $J_{m+p}(k h \gamma_p)$ devient, en fait, une fonction de Bessel modifiée de première espèce.

4. **Milieux matériels non transparents.** — Nous avons jusqu'ici considéré que le réseau est tracé sur un milieu diélectrique transparent dans le domaine de longueurs d'onde utilisé, d'indice réel par conséquent et, de plus, pratiquement indépendant de la longueur d'onde, la dispersion normale restant faible. Les coefficients γ_p sont donc réels ou purement imaginaires et toujours indépendants de la longueur d'onde.

Mais nous savons que les équations établies jusqu'ici, sauf (I.27), et les solutions algébriques que l'on peut en déduire dans ce cas, sont en fait applicables à d'autres milieux soumis à la seule hypothèse d'être homogènes et isotropes.

Si le milieu est constitué par un diélectrique absorbant, il suffit de considérer son indice comme un nombre complexe

$$(I.31) \quad n = n' - i\kappa,$$

κ étant l'indice d'extinction, et il en est évidemment de même des γ_p . Nous noterons

$$(I.32) \quad \gamma_p^t = \gamma_p' - i\gamma_p'',$$

les γ_p' et γ_p'' étant déterminés par les équations

$$\gamma_p'^2 - \gamma_p''^2 = n'^2 - \kappa^2 - \alpha_p^2 - \beta_p^2, \quad \gamma_p' \gamma_p'' = n' \kappa.$$

Si l'absorption n'est pas sélective n' , κ , les γ_p' et γ_p'' sont indépendants de la longueur d'onde.

Dans le cas d'un réseau métallique, l'indice est également complexe et les formes (I.31) et (I.32) sont encore utilisables mais n' et κ dépendent de la longueur d'onde. On sait [30] que $(n' - i\kappa)^2 = \varepsilon - 2i\sigma T$, ε étant la constante diélectrique du métal, σ sa conductivité exprimées en unités électrostatiques et T la période de l'onde électromagnétique. D'où

$$n'^2 - \kappa^2 = \varepsilon, \quad n' \kappa = \sigma T$$

et, par suite,

$$\gamma_p'^2 - \gamma_p''^2 = \varepsilon - \alpha_p^2 - \beta_p^2, \quad \gamma_p' \gamma_p'' = \sigma T.$$

Si la période T est grande, le produit $n' \kappa$ est élevé, tandis que la différence $n'^2 - \kappa^2$ reste bornée à quelques unités. Dans ces conditions, $n' \simeq \kappa \simeq \sqrt{\sigma T}$ ou, en introduisant plutôt le nombre d'ondes k , $n' \simeq \kappa \simeq \sqrt{2\pi\sigma/kc}$.

On sait [31] que cette relation, conséquence des équations de Maxwell, n'est pas vérifiée en lumière visible, mais s'applique convenablement dans le domaine des grandes longueurs d'onde, à partir de l'infrarouge assez proche. Dans ce domaine, il s'ensuit que

$$\gamma_p' \simeq \gamma_p'' \simeq \sqrt{2\pi\sigma/kc},$$

quantité indépendante de l'ordre p de diffraction. Nous trouverions ainsi comme cas limite le réseau parfaitement conducteur, en faisant croître indéfiniment la conductivité σ .

II. Profil sinusoïdal de faible amplitude

1. **Hypothèse.** — Supposons désormais petite l'amplitude du profil du réseau. Que faut-il entendre par là ? Faute d'un critère de précision a priori, comme nous l'avons fait déjà remarquer, il est difficile de choisir une hypothèse en fonc-

tion d'une précision souhaitée sur le résultat. En fait, notre choix est uniquement guidé par un souci de simplification des calculs. C'est pourquoi nous admettrons que l'amplitude h du profil est assez faible pour que les arguments $kh\gamma_p$ des fonctions de Bessel, que nous aurons à considérer, soient petits et que nous puissions adopter des développements en série de ces fonctions réduits à un ou deux termes au maximum. Si le pas du réseau est grand par rapport à la longueur d'onde, donc $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} \ll k$, γ_p est inférieur à 1 ou n^2 et il suffit que h soit petit par rapport à la longueur d'onde. Par contre si $\sqrt{\mu^2 + \nu^2} \gg k$, les arguments des fonctions de Bessel deviennent de l'ordre de $ph\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ et c'est cette quantité qui doit rester petite. Nous reviendrons plus loin, à propos de chaque cas, sur la restriction qu'impose notre hypothèse.

Celle-ci suppose toujours que la surface du réseau est voisine d'un plan. Nous devons donc nous attendre à trouver pour les champs d'ordre 0, c'est-à-dire réfléchi et réfracté, des amplitudes voisines de celles qui seraient produites par un dioptré parfaitement plan. Aussi est-il avantageux pour simplifier les calculs ultérieurs d'adopter des notations réduites. Mais celles-ci seront choisies différemment suivant le cas de polarisation considéré.

2. Champ électrique incident normal au plan d'incidence. — 1. Introduction des notations réduites. — Nous adoptons les notations définies par

$$(II.1) \quad \begin{cases} E_{0y}^r = E^i \rho_{0\perp} (1 + \varepsilon_{0\perp}^r), & E_{0y}^t = E^i \tau_{0\perp} (1 + \varepsilon_{0\perp}^t), \\ -E_{0x}^r \gamma_0^r + E_{0z}^r \alpha_0 = E^i \rho_{0\perp} \varepsilon_{0\parallel}^r, \\ \frac{1}{n} (-E_{0x}^t \gamma_0^t + E_{0z}^t \alpha_0) = E^i \tau_{0\perp} \varepsilon_{0\parallel}^t, & \vec{E}_p^r = E^i \vec{\varepsilon}_p^r, \quad \vec{E}_p^t = E^i \vec{\varepsilon}_p^t, \end{cases}$$

$\rho_{0\perp}$ et $\tau_{0\perp}$ étant les facteurs de réflexion et de transmission du dioptré plan constitué par le même milieu matériel que le support du réseau et éclairé sous la même incidence, c'est-à-dire

$$\rho_{0\perp} = (\gamma_0^r + \gamma_0^t)/(\gamma_0^r - \gamma_0^t), \quad \tau_{0\perp} = 2\gamma_0^r/(\gamma_0^r - \gamma_0^t),$$

en utilisant les notations (I.9).

Les conventions qui définissent les composantes $\varepsilon_{0\parallel}$ des champs réfléchi ou réfracté parallèles au plan d'incidence consistent à les estimer respectivement suivant les vecteurs unitaires

$$\vec{e}_{0\parallel}^r = -\gamma_0^r \vec{u}_x + \alpha_0 \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{e}_{0\parallel}^t = -\frac{\gamma_0^t}{n} \vec{u}_x + \frac{\alpha_0}{n} \vec{u}_z,$$

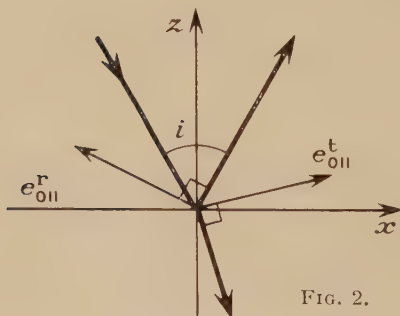


FIG. 2.

vecteurs orientés dans le sens des champs magnétiques que réfléchirait ou réfracterait le dioptré plan si le champ magnétique incident se trouvait dans le plan d'incidence (fig. 2).

L'adoption de ces notations résulte d'une application intuitive de la première phase de la méthode des réduites, phase où l'on ne conserverait que les inconnues $\vec{E}_0^r$ et $\vec{E}_0^t$. Evidemment, les solutions de première

approximation sont les champs réfléchi et réfracté par un dioptre plan.

Les équations (I.19) à (I.22) et (I.12) se transcrivent

$$(II.2) \quad \rho_{0\perp} \left(-\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\parallel}^r m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \tau_{0\perp} \dots + \\ + \sum_p \left(-\varepsilon_{py}^r + \varepsilon_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = \\ = [(-1)^m + \rho_{0\perp}] \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \tau_{0\perp} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t),$$

$$(II.3) \quad -\rho_{0\perp} \varepsilon_{0\parallel}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \frac{\tau_{0\perp}}{n} \dots + \\ + \sum_p \left(\varepsilon_{px}^r - \varepsilon_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = 0,$$

$$(II.4) \quad \rho_{0\perp} \left(\varepsilon_{0\perp}^r m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^r} + \varepsilon_{0\parallel}^r \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \tau_{0\perp} \left(\varepsilon_{0\perp}^t m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^t} + \varepsilon_{0\parallel}^t n \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t) + \\ + \sum_p \left[-\varepsilon_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + \varepsilon_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + \varepsilon_{pz}^r \alpha_p \right] \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \\ - \sum^t \dots = m \frac{\nu}{k} \alpha_0 \left[\frac{(-1)^m - \rho_{0\perp}}{\gamma_0^r} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \frac{\tau_{0\perp}}{\gamma_0^t} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t) \right],$$

$$(II.5) \quad -\rho_{0\perp} \varepsilon_{0\perp}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \tau_{0\perp} \dots + \\ + \sum_p \left[\varepsilon_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - \varepsilon_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + \varepsilon_{pz}^r \beta_p \right] \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \\ - \sum^t \dots = - \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right) [(-1)^m - \rho_{0\perp}] \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \\ - \left(\gamma_0^t + m \frac{\mu \alpha_0}{k \gamma_0^t} \right) \tau_{0\perp} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t),$$

$$(II.6) \quad \varepsilon_{px} \alpha_p + \varepsilon_{py} \beta_p + \varepsilon_{pz} \gamma_p = 0,$$

p étant désormais un entier positif ou négatif, différent de 0, m un entier quelconque et (II.6) étant applicable successivement à $\vec{\varepsilon}_p^r$ et $\vec{\varepsilon}_p^t$.

Ce système d'équations est encore rigoureux. Nous n'avons opéré aucune approximation, mais seulement un changement de notations qui, bien qu'ayant allongé l'écriture, offre l'avantage d'un meilleur conditionnement du système, propre à en faciliter la résolution ainsi que nous allons nous en rendre compte.

2. Ordres de grandeur des champs réduits. — Le réseau étant donc supposé peu différent d'un dioptre plan, tous les champs réduits seront faibles. Quelques remarques simples de symétrie permettent d'en prévoir l'ordre de grandeur. Cherchons, par exemple, l'influence d'un changement de h en $-h$. Ce changement est équivalent à une translation des axes $Oxyz$ d'une longueur π/μ suivant Ox , donc finalement au changement d'abscisse $x' = x - (\pi/\mu)$. Or, l'expression

(I.2) s'écrit, compte tenu de (I.6),

$$\vec{E}_p = \vec{E}_p \exp[-i(\mu x + \nu y)] \exp[-i k(\alpha_0 x + \gamma_p z)]$$

et, dans le nouveau système d'axes,

$$\vec{E}_p = (-1)^p \vec{E}_p \exp[-i(\mu x' + \nu y)] \exp[-i k(\alpha_0 x + \gamma_p z)].$$

Par conséquent, le changement de h en $-h$ faisant passer de $\vec{E}_p$ à $(-1)^p \vec{E}_p$, les ε_p sont vraisemblablement proportionnels à h^p . Quant aux $\vec{E}_0$, ils sont des fonctions paires de h , donc les ε_0 sont probablement de l'ordre de h^2 .

D'autre part, remarquons que si $\nu = 0$, c'est-à-dire si les sillons du réseau sont normaux au plan d'incidence, toutes les ondes diffractées restent dans le plan d'incidence et, manifestement, il ne doit pas y avoir de dépolarisation ; le champ électrique incident étant aussi parallèle aux sillons, le problème est unidimensionnel. Donc toutes les composantes $\varepsilon_{0||}$, $\varepsilon_{p x}$ ou $\varepsilon_{p z}$ sont nulles. Ces composantes ne peuvent être non nulles que si $\nu \neq 0$ et évidemment le changement de ν en $-\nu$ doit changer leur signe et ceci, quel que soit leur ordre p de diffraction.

En combinant les deux remarques précédentes et en respectant l'homogénéité nécessaire, nous prévoyons donc les ordres de grandeur probables

$$(II.7) \quad \varepsilon_{0\perp} \sim k^2 h^2, \quad \varepsilon_{0||} \sim k \nu h^2, \quad \varepsilon_{p y} \sim k^p h^p, \quad \varepsilon_{p x} \text{ et } \varepsilon_{p z} \sim k^{p-1} \nu h^p.$$

Notons bien qu'il ne s'agit là nullement d'une démonstration, puisque les considérations précédentes ne fournissaient que des renseignements sur la parité des champs réduits, mais seulement d'une supposition qui paraît vraisemblable. Nous admettons intuitivement, étant donné la « régularité » du profil sinusoidal, que l'énergie se trouve pratiquement concentrée dans les spectres à ordre de diffraction peu élevé, les amplitudes des champs variant comme la puissance de h égale à leur ordre. Nous avons déjà vérifié cette assertion dans quelques calculs particuliers antérieurs [32]. Mais nous ne manquerons pas de soumettre la solution au critère (I.27) de conservation de l'énergie qui, en notations réduites, devient

$$(II.8) \quad \gamma_0^r \rho_{0\perp}^2 (\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\perp}^{r*} + \varepsilon_{0\perp}^r \varepsilon_{0\perp}^{r*} + \varepsilon_{0||}^r \varepsilon_{0||}^{r*}) - \gamma_0^t \tau_{0\perp}^2 \dots + \\ + \sum_p (\gamma_p^r \varepsilon_p^r \varepsilon_p^{r*} - \gamma_p^t \varepsilon_p^t \varepsilon_p^{t*}) = 0. \\ \text{(ordres réels)}$$

3. Résolution. — Nous poursuivrons l'application de la méthode des réduites en bornant notre calcul aux champs réfléchi, réfracté et diffractés dans le premier ordre, les ε_0 , ε_1 et ε_{-1} , soit 16 inconnues. Les 16 équations seront :

12 équations obtenues en faisant successivement $m = 0, 1$ et -1 dans (II.2), (II.3), (II.4) et (II.5) ;

4 équations données par (II.6) appliquée aux ε^r et ε^t en prenant successivement $p = 1$ et -1 .

Puisque nous négligeons en particulier les champs diffractés d'ordre ± 2 , proportionnels, d'après (II.7), à $k^2 h^2$ ou $k \nu h^2$, il est inutile de conserver dans les équations des termes du même ordre de grandeur ou plus petits que ceux apportés par les termes en ε_2 ou ε_{-2} . On remarque que, dans ces conditions, les coefficients de Bessel peuvent être réduits à leur partie principale, sauf les $J_0(k h \gamma_0)$ figurant

aux seconds membres qui doivent être développés à deux termes. Nous introduisons donc une erreur relative de l'ordre de $k^2 h^2 \gamma_p^2$. Ainsi, le système (II.2) à (II.6) se réduit, en notant $s = \pm 1$ et en rangeant les équations dans l'ordre (II.2, $m = 0$), ..., (II.5, $m = 0$), (II.2, $m = -s$), ..., (II.5, $m = -s$) et (II.6, $p = s$) pour ε^r et ε^t , à

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon_{0\perp}^r \rho_{0\perp} + \varepsilon_{0\perp}^t \tau_{0\perp} - i \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} (-\varepsilon_{sy}^r \gamma_s^r + \varepsilon_{sz}^r \beta_s) + \\
 & \quad + i \frac{k h}{2} \sum^t \dots = -\frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t), \\
 & -\varepsilon_{0\parallel}^r \rho_{0\parallel} \gamma_0^r + \varepsilon_{0\parallel}^t \tau_{0\parallel} \gamma_0^t - i \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left(\varepsilon_{sx}^r \gamma_s^r - \varepsilon_{sz}^r s \frac{\mu}{k} \right) + \\
 & \quad + i \frac{k h}{2} \sum^t \dots = 0, \\
 & \varepsilon_{0\parallel}^r \rho_{0\perp} - \varepsilon_{0\parallel}^t \tau_{0\perp} n - i \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left[-\varepsilon_{sx}^r (\gamma_s^r)^2 + \beta_s^2 \right] + \\
 & \quad + \varepsilon_{sy}^r \alpha_s \beta_s + \varepsilon_{sz}^r \alpha_s \gamma_s^r \Big] + i \frac{k h}{2} \sum^t \dots = 0, \\
 & -\varepsilon_{0\perp}^r \rho_{0\perp} \gamma_0^r + \varepsilon_{0\perp}^t \tau_{0\perp} \gamma_0^t - i \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left[\varepsilon_{sx}^r s \beta_s \frac{\mu}{k} - \right. \\
 & \quad \left. - \varepsilon_{sy}^r (\gamma_s^r)^2 + s \alpha_s \frac{\mu}{k} \right] + \varepsilon_{sz}^r \beta_s \gamma_s^r \Big] + i \frac{k h}{2} \sum^t \dots = \frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^r \gamma_0^t (\gamma_0^r + \gamma_0^t), \\
 & \quad -\varepsilon_{sy}^r + \varepsilon_{sy}^t = 0, \\
 & \quad \varepsilon_{sx}^r - \varepsilon_{sx}^t = 0, \\
 & -\varepsilon_{sx}^r \gamma_s^r + \varepsilon_{sx}^t \gamma_s^t + \varepsilon_{sz}^r \alpha_s - \varepsilon_{sz}^t \alpha_s = 0, \\
 & \quad -\varepsilon_{sy}^r \gamma_s^r + \varepsilon_{sy}^t \gamma_s^t + \varepsilon_{sz}^r \beta_s - \varepsilon_{sz}^t \beta_s = -i k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t), \\
 & \varepsilon_{sx}^r \alpha_s + \varepsilon_{sy}^r \beta_s + \varepsilon_{sz}^r \gamma_s^r = 0, \\
 & \quad \varepsilon_{sx}^t \alpha_s + \varepsilon_{sy}^t \beta_s + \varepsilon_{sz}^t \gamma_s^t = 0.
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

Le fait remarquable, qui simplifie considérablement la résolution, est que les 6 dernières équations de ce système ne comportent que 6 inconnues. La résolution de ce système partiel s'effectue donc aisément et mène aux expressions

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_{sx}^r = \varepsilon_{sx}^t = -i s \nu h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \alpha_s / (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t), \\
 & \varepsilon_{sy}^r = \varepsilon_{sy}^t = i k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) (\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) / (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t), \\
 & \varepsilon_{sz}^r = i s \nu h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_s^t / (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t), \\
 & \varepsilon_{sz}^t = i s \nu h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_s^r / (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t).
 \end{aligned}
 \tag{II.10}$$

s désignant 1 ou -1 , 12 inconnues sont maintenant déterminées. En portant ces valeurs dans les quatre premières équations (II.9), nous aboutissons encore à deux systèmes partiels, l'un ne comportant que les $\varepsilon_{0\perp}$, l'autre uniquement les $\varepsilon_{0\parallel}$. La solution en est

$$(II.11) \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{01}^r &= k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t \left(1 + \frac{n^2 - 1}{2 \gamma_0^t} \sum_{s=\pm 1} \frac{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right), \\ \varepsilon_{01}^r &= -\frac{k \nu h^2}{2} \frac{\gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{s=\pm 1} s \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} [n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha_s (\gamma_s^r + \gamma_s^t)], \\ \varepsilon_{01}^t &= k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \left[1 - (\gamma_0^r - \gamma_0^t) \sum_{s=\pm 1} \frac{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\ \varepsilon_{01}^t &= -\frac{k \nu h^2}{2} \frac{n \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{s=\pm 1} s \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} [\alpha_0 - \gamma_0^r \alpha_s (\gamma_s^r + \gamma_s^t)]. \end{aligned} \right.$$

Nous trouvons bien les ordres de grandeur attendus. Si, jusqu'ici, la résolution s'est déroulée sans difficulté et en ne comportant que des expressions assez concises, la poursuite de la méthode des réduites entraîne un net alourdissement des équations et les calculs deviennent très longs. Ils ne sont cependant pas inextricables. Il n'est évidemment pas possible de les développer ici en détail. Nous nous bornerons à en exposer les étapes principales en montrant les simplifications qui surviennent.

Nous considérons donc maintenant le système à 28 inconnues, les champs du second ordre venant s'ajouter aux 16 inconnues précédentes. Il comporte, outre les 16 équations déjà utilisées (mais où doivent figurer désormais les ε_2), les 12 équations suivantes :

8 équations déduites de (II.2), (II.3), (II.4) et (II.5) en prenant successivement $m = 2$ et -2 ;

4 équations fournies par (II.6) appliquée aux ε^r et ε^t , pour $p = \pm 2$.

Or, observons par exemple l'équation (II.2) pour $m = -2$ s. Les termes principaux y sont $\varepsilon_{2sy}^r J_0(k h \gamma_{2s}^r) - \varepsilon_{2sy}^t J_0(k h \gamma_{2s}^t)$ qui, d'après nos prévisions (II.7), sont de l'ordre de $k^2 h^2$. Il suffit donc d'estimer les autres termes de l'équation avec cette même précision. Ainsi, les termes en ε_0 peuvent être négligés, ainsi que ceux en ε_{-2s} et ε_{-s} , de sorte que l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2sy}^r - \varepsilon_{2sy}^t - i \frac{k h}{2} \left[\gamma_s^r \left(\varepsilon_{sy}^r + \varepsilon_{sz}^r \frac{\beta_s}{\gamma_s^r} \right) - \gamma_s^t (..) \right] = \\ = \frac{k^2 h^2}{8} [\gamma_0^r (1 + \rho_{01}) - \gamma_0^t \tau_{01}] \end{aligned}$$

et, de plus, les solutions approchées (II.10) des ε_s y suffisent.

Comme il en est de même dans les 12 équations nouvelles, celles-ci, à condition d'y substituer les ε_s par leurs valeurs approchées (II.10), ne comportent que les champs diffractés du second ordre et se scindent, de plus, en deux groupes : 6 équations en ε_2 et 6 équations en ε_{-2} . Toutes simplifications effectuées, on aboutit à

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2sy}^r - \varepsilon_{2sy}^t &= -\frac{k^2 h^2}{4} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left(1 - \beta_{2s}^2 \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right), \\ -\varepsilon_{2sx}^r + \varepsilon_{2sx}^t &= -s \frac{k \nu h^2}{2} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \alpha_{2s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{2sx}^r \gamma_{2s}^r - \varepsilon_{2sx}^t \gamma_{2s}^t - \varepsilon_{2sz}^r \alpha_{2s} + \varepsilon_{2sz}^t \alpha_{2s} &= \\
 &= -s k \nu h^2 \frac{n^2 - 1}{2} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\alpha_s}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 \varepsilon_{2sy}^r \gamma_{2s}^r - \varepsilon_{2sy}^t \gamma_{2s}^t - \varepsilon_{2sz}^r \beta_{2s} + \varepsilon_{2sz}^t \beta_{2s} &= \\
 &= \frac{k^2 h^2}{4} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left[\gamma_0^t + 2(n^2 - 1) \frac{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\
 \varepsilon_{2sx}^r \alpha_{2s} + \varepsilon_{2sy}^r \beta_{2s} + \varepsilon_{2sz}^r \gamma_{2s}^r &= 0, \\
 \varepsilon_{2sx}^t \alpha_{2s} + \varepsilon_{2sy}^t \beta_{2s} + \varepsilon_{2sz}^t \gamma_{2s}^t &= 0.
 \end{aligned}$$

La solution en est

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{2sx}^r &= -s \frac{k \nu h^2}{2} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[\alpha_{2s} (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^t) + \right. \\
 &\quad \left. + (n^2 - 1) \frac{2 \alpha_0 \beta_s^2 - \gamma_{2s}^r (\alpha_s \gamma_{2s}^t - \alpha_{2s} \gamma_s^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\
 \varepsilon_{2sy}^r &= \frac{k^2 h^2}{4} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[(\alpha_{2s}^2 - \gamma_{2s}^r \gamma_{2s}^t) (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^t) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \beta_s^2 (n^2 - 1) \frac{\alpha_0 \alpha_{2s} - \gamma_{2s}^r (2 \gamma_s^t - \gamma_{2s}^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\
 \varepsilon_{2sz}^r &= s \frac{k \nu h^2}{2} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \gamma_{2s}^t \times \\
 &\quad \times \left\{ \gamma_0^t + \gamma_{2s}^t + \frac{n^2 - 1}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \left[\alpha_0 \alpha_s + 2 \gamma_s^r \gamma_s^t + \frac{\gamma_s^t}{\gamma_{2s}^t} (\alpha_{2s}^2 + \beta_{2s}^2) \right] \right\}, \\
 \varepsilon_{2sx}^t &= -s \frac{k \nu h^2}{2} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[\alpha_{2s} (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^r) + \right. \\
 &\quad \left. + (n^2 - 1) \frac{2 \alpha_0 \beta_s^2 - \gamma_{2s}^t (\alpha_s \gamma_{2s}^r - \alpha_{2s} \gamma_{2s}^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\
 \varepsilon_{2sy}^t &= \frac{k^2 h^2}{4} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[(\alpha_{2s}^2 - \gamma_{2s}^r \gamma_{2s}^t) (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^r) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \beta_s^2 (n^2 - 1) \frac{\alpha_0 \alpha_{2s} - \gamma_{2s}^t (2 \gamma_s^r - \gamma_{2s}^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \right], \\
 \varepsilon_{2sz}^t &= s \frac{k \nu h^2}{2} \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \gamma_{2s}^r \times \\
 &\quad \times \left\{ \gamma_0^t + \gamma_{2s}^r + \frac{n^2 - 1}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \left[\alpha_0 \alpha_s - 2 \gamma_s^r \gamma_s^t + \frac{\gamma_s^r}{\gamma_{2s}^r} (\alpha_{2s}^2 + \beta_{2s}^2) \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{II.12}$$

La connaissance des champs diffractés du second ordre permettrait ensuite une détermination des champs ε_0 et ε_s avec une précision supérieure à celle des solutions (II.10) et (II.11). Mais la longueur et la complication du calcul littéral deviennent prohibitives. D'ailleurs les corrections à apporter à ces solutions

seraient faibles, de l'ordre de $k^2 h^2 \gamma_{2s}^2$ en valeur relative, comme il est facile de le voir soit par l'examen des équations (II.2) à (II.5), soit grâce aux remarques sur la parité des champs.

Ainsi arrêterons-nous ici la résolution littérale, en rappelant que (II.10), (II.11) et (II.12) donnent une solution approchée à $k^2 h^2 \gamma_p^2$ près, en valeur relative, pour les champs réduits, définis par (II.1), réfléchi, réfracté et diffractés dans les deux premiers ordres.

3. Champ magnétique incident normal au plan d'incidence. — 1. Notations réduites. — Dans ce cas de polarisation, nous prenons comme inconnues les champs magnétiques et nous adoptons des notations réduites analogues à (II.1) :

$$(II.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{0y}^r = H^i \rho_{0\parallel}^r (1 + \zeta_{0\perp}^r), \quad H_{0y}^t = H^i \tau_{0\parallel}^t (1 + \zeta_{0\perp}^t), \\ -H_{0x}^r \gamma_0^r + H_{0z}^r \alpha_0 = H^i \rho_{0\parallel}^r \zeta_{0\parallel}^r, \quad \frac{1}{n} (-H_{0x}^t \gamma_0^t + H_{0z}^t \alpha_0) = H^i \tau_{0\parallel}^t \zeta_{0\parallel}^t, \\ \widetilde{H}_p^r = H^i \widetilde{\zeta}_p^r, \quad \widetilde{H}_p^t = H^i \widetilde{\zeta}_p^t. \end{array} \right.$$

Comme précédemment les champs réduits $\zeta_{0\perp}$ sont normaux au plan d'incidence ; $\zeta_{0\parallel}^r$ et $\zeta_{0\parallel}^t$ sont estimés respectivement suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_{0\parallel}^r$ et $\vec{e}_{0\parallel}^t$ situés dans le plan d'incidence et normaux aux rayons réfléchi et réfracté.

$\rho_{0\parallel}^r$ et $\tau_{0\parallel}^t$ sont les facteurs de réflexion et de transmission en amplitude relatifs aux champs magnétiques (l'accentuation est destinée à les distinguer des facteurs habituels relatifs aux champs électriques et le signe $\parallel$ rappelle que le champ électrique incident est parallèle au plan d'incidence)

$$\rho_{0\parallel}^r = (n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t) / (n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t), \quad \tau_{0\parallel}^t = 2 n^2 \gamma_0^r / (n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t).$$

Le problème est traduit par les équations (I.23) à (I.26), plus la relation (I.13). qui s'écrivent, moyennant l'introduction des notations (II.13), sous la forme

$$(II.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{0\parallel}^r \left(-\zeta_{0\perp}^r + \zeta_{0\parallel}^r m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \\ - \tau_{0\parallel}^t \dots + \sum_p \left(-\zeta_{py}^r + \zeta_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \\ - \sum^t \dots = [(-1)^m + \rho_{0\parallel}^r] \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \tau_{0\parallel}^t \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t), \\ - \rho_{0\parallel}^r \zeta_{0\parallel}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \frac{\tau_{0\parallel}^t}{n} \dots + \\ + \sum_p \left(\zeta_{px}^r - \zeta_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \sum^t \dots = 0, \\ \rho_{0\parallel}^r \left(\zeta_{0\perp}^r m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^r} + \zeta_{0\parallel}^r \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \\ - \frac{\tau_{0\parallel}^t}{n^2} \left(\zeta_{0\perp}^t m \frac{\nu \alpha_0}{k \gamma_0^t} + \zeta_{0\parallel}^t n \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t) + \\ + \sum_p \left[-\zeta_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + \zeta_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + \zeta_{pz}^r \alpha_p \right] \times \\ \times \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \frac{1}{n^2} \sum^t \dots = \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (II.14) \quad &= m \frac{\nu}{k} \alpha_0 \left[\frac{(-1)^m - \rho'_{0\parallel}}{\gamma_0^r} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \frac{\tau'_{0\parallel}}{n^2 \gamma_0^t} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t) \right], \\
 &- \rho'_{0\parallel} \zeta_{0\perp}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0^r}{\gamma_0^r} \right) \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) + \frac{\tau'_{0\parallel}}{n^2} \dots + \\
 &+ \sum_p \left[\zeta_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - \zeta_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + \zeta_{pz}^r \beta_p \right] \times \\
 &\times \mathbf{i}^{-p} \mathbf{J}_{m+p}(k h \gamma_p^r) - \frac{1}{n^2} \sum^t \dots = - \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0^r}{\gamma_0^r} \right) [(-1)^m - \rho'_{0\parallel}] \times \\
 &\times \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^r) - \left(\gamma_0^t + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0^t}{\gamma_0^t} \right) \frac{\tau'_{0\parallel}}{n^2} \mathbf{J}_m(k h \gamma_0^t), \\
 &\zeta_{px} \alpha_p + \zeta_{py} \beta_p + \zeta_{pz} \gamma_p = 0;
 \end{aligned}$$

m est toujours un entier quelconque, p un entier différent de 0 et la dernière de ces équations est applicable à ζ_p^r aussi bien qu'à ζ_p^t .

Quant au principe de conservation de l'énergie, il prend la forme

$$\begin{aligned}
 (II.15) \quad &\gamma_0^r \rho_{0\parallel}^{\prime 2} (\zeta_{0\perp}^r + \zeta_{0\perp}^{r*} + \zeta_{0\perp}^r \zeta_{0\perp}^{r*} + \zeta_{0\parallel}^r \zeta_{0\parallel}^{r*}) - \gamma_0^t \frac{\tau_{0\parallel}'}{n^2} (\dots) + \\
 &+ \sum_p \gamma_p^r \zeta_p^r \cdot \zeta_p^{r*} - \frac{\gamma_p^t}{n^2} \zeta_p^t \cdot \zeta_p^{t*} = 0. \\
 &(\text{ordres réels})
 \end{aligned}$$

2. *Résolution.* — Le principe de la résolution reste le même que dans le premier cas de polarisation et, en conservant les mêmes approximations, l'analogie du système (II.9) s'écrit

$$\begin{aligned}
 (II.16) \quad &- \zeta_{0\perp}^r \rho'_{0\parallel} + \zeta_{0\perp}^t \tau'_{0\parallel} - \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} (-\zeta_{sy}^r \gamma_s^r + \zeta_{sz}^r \beta_s) + \\
 &+ \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum^t \dots = \frac{k^2 h^2 (n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{2 n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}, \\
 &- \zeta_{0\parallel}^r \rho'_{0\parallel} \gamma_0^r + \zeta_{0\parallel}^t \tau'_{0\parallel} \frac{\gamma_0^t}{n} - \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left(\zeta_{sx}^r \gamma_s^r - \zeta_{sz}^r s \frac{\mu}{k} \right) + \\
 &+ \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum^t \dots = 0, \\
 &\zeta_{0\parallel}^r \rho'_{0\parallel} - \zeta_{0\parallel}^t \frac{\tau'_{0\parallel}}{n} - \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left[-\zeta_{sx}^r (\gamma_s^{r^2} + \beta_s^r) + \right. \\
 &\left. + \zeta_{sy}^r \alpha_s \beta_s + \zeta_{sz}^r \alpha_s \gamma_s^r \right] + \mathbf{i} \frac{k h}{2 n^2} \sum^t \dots = 0, \\
 &- \zeta_{0\perp}^r \rho'_{0\parallel} \gamma_0^r + \zeta_{0\perp}^t \frac{\tau'_{0\parallel}}{n^2} \gamma_0^t - \\
 &- \mathbf{i} \frac{k h}{2} \sum_{s=\pm 1} \left[\zeta_{sx}^r s \beta_s \frac{\mu}{k} - \zeta_{sy}^r \left(\gamma_s^{r^2} + s \alpha_s \frac{\mu}{k} \right) + \zeta_{sz}^r \beta_s \gamma_s^r \right] + \\
 &+ \mathbf{i} \frac{k h}{2 n^2} \sum^t \dots = \frac{k^2 h^2 (n^2 - 1) \gamma_0^r \gamma_0^t}{2 n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(II.16)} \quad & -\zeta_{sy}^r + \zeta_{sy}^t = 0, \\
 & \zeta_{sx}^r - \zeta_{sx}^t = 0, \\
 & -\zeta_{sx}^r \gamma_s^r + \zeta_{sx}^t \frac{\gamma_s^t}{n^2} + \zeta_{sz}^r \alpha_s - \zeta_{sz}^t \frac{\alpha_s}{n^2} = -i s v h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}, \\
 & -\zeta_{sy}^r \gamma_s^r + \zeta_{sy}^t \frac{\gamma_s^t}{n^2} + \zeta_{sz}^r \beta_s - \zeta_{sz}^t \frac{\beta_s}{n^2} = i k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \alpha_s, \\
 & \zeta_{sx}^r \alpha_s + \zeta_{sy}^r \beta_s + \zeta_{sz}^r \gamma_s^r = 0, \\
 & \zeta_{sx}^t \alpha_s + \zeta_{sy}^t \beta_s + \zeta_{sz}^t \gamma_s^t = 0.
 \end{aligned}$$

La résolution conduit aux valeurs

$$\begin{aligned}
 \text{(II.17)} \quad & \zeta_{0\perp}^r = k^2 h^2 \frac{n^2 \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left\{ 1 - \sum_{s=\pm 1} \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \times \right. \\
 & \quad \times \left[\alpha_0 \alpha_s - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) \frac{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) n^2 \alpha_0^2 - (\beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) \gamma_0^r \gamma_0^t}{2 n^2 \gamma_0^r} \right] \Big\}, \\
 & \zeta_{0\parallel}^r = -\frac{k v h^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_0^r}{2} \sum_{s=\pm 1} s (\gamma_s^r - \gamma_s^t) \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha_s (\gamma_s^r + \gamma_s^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 & \zeta_{0\perp}^t = k^2 h^2 \frac{n^2 - 1}{4} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left\{ 1 - \sum_{s=\pm 1} \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \times \right. \\
 & \quad \times \left[\alpha_0 \alpha_s - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) \frac{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) \alpha_0^2 - (\beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right] \Big\}, \\
 & \zeta_{0\parallel}^t = -k v h^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{4 n} \sum_{s=\pm 1} s (\gamma_s^r - \gamma_s^t) \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha_s (\gamma_s^r + \gamma_s^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 & \zeta_{sx}^r = \zeta_{sx}^t = i s v h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha_s (\gamma_s^r + \gamma_s^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 & \zeta_{sy}^r = -i k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha_s - \gamma_0^t [\gamma_s^t - \beta_s^2 (\gamma_s^r + \gamma_s^t)]}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 & \zeta_{sy}^t = -i k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha_s - \gamma_0^t [n^2 \gamma_s^r - \beta_s^2 (\gamma_s^r + \gamma_s^t)]}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 & \zeta_{sz}^r = \zeta_{sz}^t = -i s v h \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t (\gamma_s^r + \gamma_s^t)}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}.
 \end{aligned}$$

Les champs diffractés du second ordre pourraient être calculés comme dans le premier cas de polarisation, mais leur expression extrêmement compliquée, irréductible à une écriture condensée, rend incertain leur intérêt. Aussi ne développons-nous pas ce calcul ici. Nous le reprendrons dans l'étude des cas particuliers que nous considérerons par la suite.

Comme précédemment, l'incertitude relative sur la solution (II.17) est de l'ordre de $k^2 h^2 \gamma_p^2$.

4. **Conclusion.** — A l'issue de ce chapitre, nous disposons donc des solutions littérales (II.10), (II.11), (II.12) et (II.17) concernant les champs réfléchi, réfracté et diffractés dans les premiers ordres, dans les deux cas principaux de polarisation, solutions approchées, comportant une incertitude relative de l'ordre de $k^2 h^2 \gamma_p^2$, obtenues en supposant l'amplitude du profil sinusoïdal du réseau assez petite pour que les fonctions de Bessel figurant dans les conditions aux limites puissent être développées en séries à deux termes seulement au maximum.

Nous ne soumettons pas encore ces solutions au critère de conservation de l'énergie. Celui-ci, dans ses expressions (II.8) et (II.15), ne met en cause que les ondes réelles. Or, nous ignorons encore tout sur la nature des champs diffractés. Nous les avons calculés algébriquement et ils peuvent être réels ou évanescents suivant que les coefficients γ qui figurent dans leur expression sont réels ou complexes. C'est que nous n'avons encore rien supposé sur la fréquence spatiale du réseau, ce que nous ferons dans les deux prochains chapitres.

Mais d'ores et déjà s'imposent quelques conclusions. Le champ incident, électrique ou magnétique, étant normal au plan d'incidence, les champs réfléchi, réfracté et diffractés ne le sont plus, en général, puisqu'apparaissent des composantes parallèles au plan d'incidence. Il y a donc dépolarisation. Son importance dépend des rapports μ/k et ν/k , donc des valeurs relatives de la longueur d'onde et des périodes spatiales suivant Ox et Oy du profil du réseau, mais non de l'amplitude de ce profil, puisque toutes les composantes d'un même champ sont proportionnelles à la même puissance de h .

D'autre part, les pouvoirs de réflexion R et de transmission T du réseau diffèrent de ceux, R_0 et T_0 , d'un dioptré plan :

$$(II.18) \quad \begin{aligned} R_{\perp} &= R_{0\perp} \left[(1 + \varepsilon_{0\perp}^r) (1 + \varepsilon_{0\perp}^{r*}) + \varepsilon_{0\parallel}^r \varepsilon_{0\parallel}^{r*} \right], \\ T_{\perp} &= T_{0\perp} \left[(1 + \varepsilon_{0\perp}^t) (1 + \varepsilon_{0\perp}^{t*}) + \varepsilon_{0\parallel}^t \varepsilon_{0\parallel}^{t*} \right], \end{aligned}$$

et, dans le second cas de polarisation, de la même manière :

$$(II.19) \quad \begin{aligned} R_{\parallel} &= R_{0\parallel} \left[(1 + \zeta_{0\perp}^r) (1 + \zeta_{0\perp}^{r*}) + \zeta_{0\parallel}^r \zeta_{0\parallel}^{r*} \right], \\ T_{\parallel} &= T_{0\parallel} \left[(1 + \zeta_{0\perp}^t) (1 + \zeta_{0\perp}^{t*}) + \zeta_{0\parallel}^t \zeta_{0\parallel}^{t*} \right]. \end{aligned}$$

Certains termes, de l'ordre de grandeur de l'incertitude sur la solution, peuvent être négligés. Mais ces termes ne sont pas les mêmes suivant la valeur de la fréquence spatiale du réseau.

III. Réseau de basse fréquence spatiale

Ce chapitre sera consacré au cas où la fréquence spatiale du réseau est suffisamment petite pour que les ondes diffractées dans le premier ordre soient réelles. D'après (I.7) ceci est réalisé si

$$(III.1) \quad 1 - [\alpha_0 + (\mu/k)]^2 - (\nu^2/k^2) > 0,$$

car γ_1^r est alors réel et, à fortiori, γ_1^t , γ_{-1}^r et γ_{-1}^t si nous supposons μ positif, ce que nous admettrons désormais. La condition (III.1) fait intervenir d'une part l'orientation relative du plan d'incidence et des sillons du réseau qui dépend des valeurs respectives de μ et de ν , d'autre part l'angle d'incidence. La limite supérieure des fréquences spatiales qui la réalisent est évidemment d'autant plus basse que l'incidence est plus rasante.

Dans ce cas, les γ_s^r et γ_s^t ($s = \pm 1$) prennent les acceptions (I.7). Ils sont, en

valeur absolue, inférieurs respectivement à 1 et n de sorte que l'hypothèse introduite au chapitre précédent consiste seulement à admettre que l'amplitude h du profil sinusoïdal est petite par rapport à $\lambda/2\pi$. S'il en est ainsi, les solutions approchées (II.10), (II.11), (II.12) et (II.17) conviennent et l'incertitude qu'elles comportent est de l'ordre de $k^2 h^2 \gamma_p^2$. Vérifions qu'elles obéissent bien au principe de conservation de l'énergie. Nous effectuerons cette vérification à l'ordre de grandeur $k^4 h^4$ près. Nous négligerons donc dans (II.8) les termes en $\varepsilon_{0\perp} \varepsilon_{0\perp}^*$ qui sont effectivement en $k^4 h^4$, ceux en $\varepsilon_{0\parallel} \varepsilon_{0\parallel}^*$ dont l'ordre de grandeur $k^2 v^2 h^4$ est encore inférieur, ainsi que ceux en $\varepsilon_{2S} \varepsilon_{2S}^*$ également du même ordre. (II.8) devient donc

$$(III.2) \quad 2 \gamma_0^r \rho_{0\perp}^2 \varepsilon_{0\perp}^r - 2 \gamma_0^t \tau_{0\perp}^2 \varepsilon_{0\perp}^t + \sum_{s=\pm 1} (\gamma_s^r \varepsilon_s^r \cdot \varepsilon_s^{r*} - \gamma_s^t \varepsilon_s^t \cdot \varepsilon_s^{t*}) = 0.$$

Il est facile de voir, d'après (II.11), que

$$2 \gamma_0^r \rho_{0\perp}^2 \varepsilon_{0\perp}^r - 2 \gamma_0^t \tau_{0\perp}^2 \varepsilon_{0\perp}^t = -k^2 h^2 \gamma_0^r{}^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \sum_{s=\pm 1} \frac{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t},$$

tandis que

$$\gamma_s^r \varepsilon_s^r \cdot \varepsilon_s^{r*} - \gamma_s^t \varepsilon_s^t \cdot \varepsilon_s^{t*} = k^2 h^2 \gamma_0^r{}^2 \frac{(\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) (\gamma_s^r - \gamma_s^t) (\alpha_s^2 + \beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)}{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} (\gamma_s^r - \gamma_s^t) (\alpha_s^2 + \beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) &= \\ &= (\gamma_s^r - \gamma_s^t) (\alpha_s^2 + \beta_s^2) - \gamma_s^t (1 - \alpha_s^2 - \beta_s^2) + \gamma_s^r (n^2 - \alpha_s^2 - \beta_s^2) \\ \text{ou } (\gamma_s^r - \gamma_s^t) (\alpha_s^2 + \beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t) &= n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t, \text{ relation qui nous a d'ailleurs servi} \end{aligned}$$

maintes fois pour simplifier nos calculs précédents. Donc

$$\gamma_s^r \varepsilon_s^r \cdot \varepsilon_s^{r*} - \gamma_s^t \varepsilon_s^t \cdot \varepsilon_s^{t*} = k^2 h^2 \gamma_0^r{}^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \frac{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}$$

et la relation (III.2) est vérifiée.

Il en est de même de la condition (II.15) relative au second cas de polarisation. Les calculs entraînent quelques longueurs mais ne soulèvent pas de difficultés majeures, aussi ne les relaterons-nous pas ici.

Cela nous donne donc l'assurance qu'au degré d'approximation choisi, il était légitime de négliger, dans les calculs précédents, les champs diffractés d'ordre supérieur à 1.

1. Réseau de très basse fréquence spatiale. — Nous appellerons ainsi un réseau à fréquence spatiale assez basse pour que $\sqrt{\mu^2 + v^2}$ soit nettement inférieur à k , c'est-à-dire tel que sa constante d'espacement soit beaucoup plus grande que la longueur d'onde. Les γ_p peuvent alors être développés en séries

$$(III.3) \quad \begin{aligned} \gamma_p^r &= \gamma_0^r \left(1 - p \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r{}^2} - p^2 \frac{\mu^2 + v^2 \gamma_0^r{}^2}{2 k^2 \gamma_0^r{}^4} + \dots \right), \\ \gamma_p^t &= \gamma_0^t \left(1 - p \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^t{}^2} - p^2 \frac{\mu^2 n^2 + v^2 \gamma_0^t{}^2}{2 k^2 \gamma_0^t{}^4} + \dots \right), \end{aligned}$$

à condition, pour γ_p^r , que l'incidence ne soit pas rasante. Il se pose, dans ce cas, la question des valeurs relatives de $k h$ et μ/k ou v/k . En effet, pousser trop loin les développements en série (III.3) n'aurait aucun sens puisque les termes en puissances élevées de μ/k ou v/k deviendraient inférieurs à l'incertitude en $k^2 h^2$

sur nos solutions. Cependant, afin de ne pas multiplier le nombre de cas à distinguer, nous adopterons les développements (III.3), étant bien entendu que dans chaque cas numérique concret, il conviendrait éventuellement d'écarter, dans les résultats terminaux, les termes trop petits.

L'introduction des séries (III.3) dans les solutions (II.10), (II.11), (II.12) et (II.17) mène aux formes approchées suivantes :

a) champ électrique incident normal au plan d'incidence :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{01}^r &= -k^2 h^2 \gamma_0^r \left(1 - \frac{\mu^2 n^2 \gamma_0^r{}^3 + \gamma_0^t{}^3}{k^2 \gamma_0^r{}^4 \gamma_0^t{}^3} - \frac{\gamma_0^r{}^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t \alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t}{k^2 2 \gamma_0^r \alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{01}^r &= -\mu \nu h^2 \frac{n^2 (n^2 - 1) \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{\gamma_0^r}{\gamma_0^t} + \dots, \\
 \varepsilon_{01}^t &= -k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \times \\
 &\quad \times \left(1 - 2 \frac{\mu^2 n^2 \gamma_0^r{}^3 + \gamma_0^t{}^3}{k^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_0^r \gamma_0^t} - \frac{\gamma_0^r{}^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t}{k^2 \alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{01}^t &= -\mu \nu h^2 \frac{n (n^2 - 1)}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{\gamma_0^r}{\gamma_0^t} + \dots, \\
 \varepsilon_{sx}^r = \varepsilon_{sx}^t &= -i s \nu h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \alpha_0 \times \\
 &\quad \times \left(1 + s \frac{\mu}{k} \frac{n^2}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{1}{\alpha_0 \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{sy}^r = \varepsilon_{sy}^t &= i k h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - s \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{sz}^r &= i s \nu h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \gamma_0^t \left(1 + s \frac{\mu}{k} \frac{n^2 - 1}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{sz}^t &= i s \nu h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r{}^2 \left(1 + s \frac{\mu}{k} \frac{n^2 - 1}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{2sx}^r = \varepsilon_{2sx}^t &= s k \nu h^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r{}^2 \alpha_0 + \dots, \\
 \varepsilon_{2sy}^r &= -\frac{k^2 h^2}{2} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r{}^2 \left(1 - s \frac{\mu}{k} \frac{2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{2sy}^t &= -k^2 h^2 \frac{\gamma_0^r}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \left(1 - 2 s \frac{\mu}{k} \frac{\gamma_0^r + 2 \gamma_0^t}{\gamma_0^r + \gamma_0^t} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \varepsilon_{2sz}^r = \varepsilon_{2sz}^t &= -s k \nu h^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r{}^2 \gamma_0^t + \dots;
 \end{aligned}
 \tag{III.4}$$

b) champ magnétique incident normal au plan d'incidence ; une fois de plus, les calculs relatifs à ce cas étant extrêmement compliqués, nous limiterons tous les développements aux termes en μ/k et ν/k :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{0\perp}^r &= -k^2 h^2 \gamma_0^{r^2} + \dots, \\
 \zeta_{0\parallel}^r &= -\mu \nu h^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \alpha_0^2} \frac{n^2 \gamma_0^r}{\gamma_0^t} + \dots, \\
 \zeta_{0\perp}^t &= -k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 + \dots, \\
 \zeta_{0\parallel}^t &= -\mu \nu h^2 n \frac{n^2 - 1}{2 \gamma_0^t} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} + \dots, \\
 \zeta_{sx}^r = \zeta_{sx}^t &= -i s \nu h \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \alpha_0 \left(1 - s \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \zeta_{sy}^r &= i k h \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^t \left(1 + s \frac{\mu}{k} \frac{1}{n^2 \gamma_0^r - \alpha_0^2} \frac{n^2 \alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \zeta_{sy}^t &= -i k h \frac{n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left(1 - s \frac{\mu}{k} \frac{1}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\
 \zeta_{sz}^r = \zeta_{sz}^t &= -i s \nu h \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^t \left(1 - s \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{III.5}$$

2. **Le réseau considéré comme objet de phase.** — Les solutions (III.4) et (III.5) résultent évidemment d'approximations. Mais ces approximations sont uniquement d'ordre mathématique. La mise en équations du problème de diffraction a été effectuée rigoureusement. Il peut être intéressant de confronter nos résultats avec ceux que produirait une méthode plus simple où les hypothèses simplificatrices seraient introduites dès la mise en équations.

La méthode que nous allons maintenant examiner consistera à considérer le réseau comme un objet de phase, c'est-à-dire à admettre qu'il n'introduit dans les faisceaux réfléchi et réfracté que des fluctuations de phase résultant des onduations du dioptre, mais pas de fluctuations d'amplitude, ni de variations de l'état de polarisation des ondes. C'est donc une théorie scalaire.

En un point quelconque du plan moyen xOy du dioptre, le champ incident est

$$\mathcal{U}(x, y, 0) = U^i \exp(-i k x \sin i)$$

et les champs réfléchi et transmis totaux

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}^r(x, y, 0) &= U^i \rho_0 \exp(-i k x \sin i) \exp[i \varphi_r(x, y)], \\
 \mathcal{U}^t(x, y, 0) &= U^i \tau_0 \exp(-i k x \sin i) \exp[i \varphi_t(x, y)]
 \end{aligned}
 \tag{III.6}$$

car, d'après l'hypothèse de base, les amplitudes sont égales à celles que produirait un dioptre plan. Il se produit seulement des avances de phase φ_r et φ_t fonctions des coordonnées x et y :

$$\varphi_r(x, y) = 2 k \gamma_0^r z(x, y), \quad \varphi_t(x, y) = k (\gamma_0^r + \gamma_0^t) z(x, y)
 \tag{III.7}$$

ou encore

$\varphi_r(x, y) = 2 k h \gamma_0^r \cos(\mu x + \nu y)$, $\varphi_t(x, y) = k h (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \cos(\mu x + \nu y)$ selon des formules bien connues en interférences. Si l'amplitude h du profil est très inférieure à la longueur d'onde, ces déphasages sont faibles et nous adopterons le développement en série

$$(III.8) \quad e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$$

On aura donc

$$\mathcal{U}^r(x, y, 0) = U^i \rho_0 e^{-ikx \sin i} \times \\ \times [1 + 2 i k h \gamma_0^r \cos(\mu x + \nu y) - 2 k^2 h^2 \gamma_0^{r^2} \cos^2(\mu x + \nu y) + \dots].$$

Séparons la valeur moyenne de la valeur variant avec x et y . La valeur moyenne décrit une onde plane uniforme qui est évidemment l'onde réfléchie

$$\mathcal{U}_0^r(x, y, 0) = U^i \rho_0 e^{-ikx \sin i} (1 - k^2 h^2 \gamma_0^{r^2} + \dots).$$

La partie fluctuante est

$$\mathcal{U}^r(x, y, 0) = \\ = U^i \rho_0 e^{-ikx \sin i} [2 i k h \gamma_0^r \cos(\mu x + \nu y) - k^2 h^2 \gamma_0^{r^2} \cos 2(\mu x + \nu y) + \dots].$$

En écrivant les cosinus sous forme d'exponentielles imaginaires, on reconnaît la somme des champs diffractés :

$$(III.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{U}_1^r(x, y, 0) = i U^i \rho_0 k h \gamma_0^r \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + \frac{\mu}{k} \right) x + \frac{\nu}{k} y \right] \right\}, \\ \mathcal{U}_{-1}^r(x, y, 0) = i U^i \rho_0 k h \gamma_0^r \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i - \frac{\mu}{k} \right) x - \frac{\nu}{k} y \right] \right\}, \\ \mathcal{U}_2^r(x, y, 0) = \\ = - U^i \rho_0 \frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^{r^2} \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + 2 \frac{\mu}{k} \right) x + 2 \frac{\nu}{k} y \right] \right\}, \\ \mathcal{U}_{-2}^r(x, y, 0) = \\ = - U^i \rho_0 \frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^{r^2} \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i - 2 \frac{\mu}{k} \right) x - 2 \frac{\nu}{k} y \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Nous trouvons aussi les amplitudes des différents champs

$$(III.10) \quad U_0^r = U^i \rho_0 (1 - k^2 h^2 \gamma_0^{r^2}), \\ U_s^r = i U^i \rho_0 k h \gamma_0^r, \quad U_{2s}^r = -\frac{1}{2} U^i \rho_0 k^2 h^2 \gamma_0^{r^2}.$$

Pour passer aux champs transmis, il suffit de changer ρ_0 en τ_0 et γ_0^r en $(\gamma_0^r + \gamma_0^t)/2$ d'après (III.7). D'où

$$(III.11) \quad U_0^t = U^i \tau_0 \left[1 - k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \right], \\ U_s^t = i U^i \tau_0 k h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2}, \quad U_{2s}^t = - U^i \tau_0 \frac{k^2 h^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2.$$

La théorie que nous venons ainsi de développer étant scalaire, elle revient à admettre que les ondes ont même polarisation que celle des ondes réfléchie ou transmise par un dioptré plan. Suivant que l'on attribue à ρ_0 et τ_0 les valeurs $\rho_{0\perp}$ et $\tau_{0\perp}$ ou $\rho_{0\parallel}$ et $\tau_{0\parallel}$, les formules (III.10) et (III.11) décrivent les solutions

correspondant à l'un ou l'autre des deux cas principaux de polarisation. On constate immédiatement que ces solutions, transposées en notations réduites, sont identiques aux parties principales des expressions (III.4) et (III.5) des ε_{01} , ε_{py} , ζ_{01} et ζ_{py} .

Par conséquent cette théorie constitue une première approximation, valable seulement si μ/k ou ν/k peut être négligé, c'est-à-dire si le pas du réseau est considérablement plus grand que la longueur d'onde, condition qui entraîne la conséquence que les ondes diffractées se propagent suivant des directions extrêmement voisines de celles des ondes réfléchie ou réfractée. Elle néglige toute dépolarisation. Notons bien que l'imprécision de cette théorie ne doit pas être imputée à l'insuffisance du développement en série (III.8) de $\exp(i\varphi)$. L'addition de termes supplémentaires n'apporterait que des corrections en puissances entières de kh , mais nullement les termes en μ/k et ν/k qu'introduit la théorie rigoureuse. C'est le principe même de la méthode qu'il faut incriminer, qui consiste à admettre que les ondulations du dioptré provoquent, en tout point $(x, y, 0)$, les écarts de phase (III.7) identiques à ceux que causerait une lame à faces parallèles d'épaisseur $z(x, y)$. On se rend compte ainsi du caractère paradoxal de cette hypothèse tendant justement à expliquer la diffraction, c'est-à-dire l'existence de rayons qui s'écartent de la direction moyenne de réflexion.

A titre d'exemple, considérons un réseau, tracé sur un verre transparent d'indice 1,50, tel que $\mu = \nu = k/4$, c'est-à-dire dont les sillons sont orientés à 45° du plan d'incidence et dont le pas est égal à 2,83 fois la longueur d'onde λ . Supposons son amplitude $h = \lambda/20$. Eclairons-le sous l'incidence $i = 45^\circ$, le champ électrique étant normal au plan d'incidence. Proposons-nous de calculer les champs diffractés dans les ordres 1 et -1 . La théorie scalaire mène à

$$\varepsilon_{1y}^r = \varepsilon_{1y}^t = \varepsilon_{-1y}^r = \varepsilon_{-1y}^t = -0,067 \mathbf{i},$$

les autres composantes étant nulles. L'application des expressions (II.10) déduites de la théorie électromagnétique conduit aux valeurs

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1x}^r &= \varepsilon_{1x}^t = 0,022 \mathbf{i}, & \varepsilon_{-1x}^r &= \varepsilon_{-1x}^t = -0,005 \mathbf{i}, \\ \varepsilon_{1y}^r &= \varepsilon_{1y}^t = -0,103 \mathbf{i}, & \varepsilon_{-1y}^r &= \varepsilon_{-1y}^t = -0,058 \mathbf{i}, \\ \varepsilon_{1z}^r &= 0,026 \mathbf{i}, & \varepsilon_{-1z}^r &= -0,014 \mathbf{i}, \\ \varepsilon_{1z}^t &= -0,005 \mathbf{i}, & \varepsilon_{-1z}^t &= 0,009 \mathbf{i}. \end{aligned}$$

La discordance entre les deux théories apparaît d'une manière flagrante.

En conclusion, considérer le réseau comme un objet de phase est une hypothèse permettant d'élaborer un calcul approximatif des différents champs mais à condition que l'amplitude de son profil sinusoïdal soit très petite et sa constante d'espacement très grande par rapport à la longueur d'onde. Dans des cas plus généraux, cette méthode est en défaut. Elle néglige l'inclinaison variable du plan tangent au dioptré sur son plan moyen, donc les fluctuations d'amplitude résultant des fluctuations des conditions aux limites. Sa nature scalaire ne lui permet pas de préciser la polarisation des différentes ondes.

Les critiques que nous venons de formuler à propos du réseau à profil sinusoïdal restent bien entendu valables dans les cas les plus généraux d'objets dits « de phase ». En toute rigueur, l'objet de phase n'existe pas ou, du moins, un objet transparent ne se comporte-t-il comme tel que dans des circonstances très exceptionnelles. Il faudrait imaginer un cas tel que celui représenté sur la figure 3,

d'une lame transparente d'épaisseur variable, mais de manière discontinue, éclairée normalement.

Comme la théorie du microscope à contraste de phase est justement basée sur l'assimilation des objets observés à des objets de phase nous voyons que certaines réserves s'imposent, sur lesquelles nous reviendrons dans un chapitre ultérieur consacré à la diffusion superficielle.

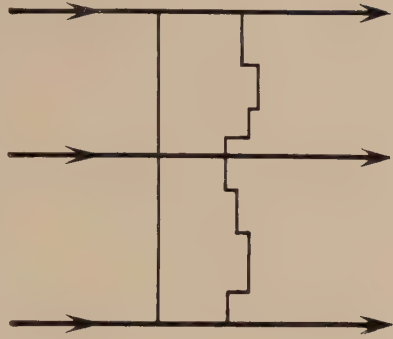


FIG. 3.

3. Champs diffractés dans les spectres d'ordre élevé. —

Malgré le manque de rigueur de la théorie scalaire que nous venons de discuter, il est permis de l'employer, grâce à son extrême simplicité, à la détermination approchée des champs diffractés dans des spectres d'ordre élevé, à condition que les ondes correspondantes soient réelles, donc que la fréquence spatiale du réseau soit très basse.

Reprenons, sous une forme plus détaillée, le développement (III.8)

$$e^{i\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{\varphi^m}{m!}.$$

L'avance de phase φ étant proportionnelle à $z(x, y)$, donc à $\cos(\mu x + \nu y)$, on peut écrire

$$\varphi = a [e^{i(\mu x + \nu y)} + e^{-i(\mu x + \nu y)}],$$

a étant un facteur de proportionnalité qui diffère suivant que l'on considère φ_r ou φ_t et que nous déduirons de (III.7).

Par conséquent, en développant la puissance m du binôme,

$$(III.12) \quad e^{i\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{a^m}{m!} \sum_{m'=0}^m C_m^{m-m'} e^{-i(2m'-m)(\mu x + \nu y)}.$$

En portant cette valeur dans les expressions (III.6) des champs réfléchi et transmis totaux, nous voyons que les champs diffractés dans l'ordre p s'obtiennent en prélevant dans (III.12) la composante d'ordre $-p$,

$$\sum_{m=p, p+2, \dots, \infty} i^m \frac{a^m}{m!} C_m^{(m-p)/2}$$

si p est positif, sinon la somme comporte $m = p, p-2, \dots, -\infty$. Par conséquent,

$$U_p^r = U^i \rho_0 \sum_{q=0}^{\pm\infty} \frac{(i a_r)^{p+2q}}{(p+2q)!} C_{p+2q}^q, \quad U_p^t = U^i \tau_0 \sum_{q=0}^{\pm\infty} \frac{(i a_t)^{p+2q}}{(p+2q)!} C_{p+2q}^q,$$

q étant un entier de même signe que p .

Or, d'après (III.7),

$$(III.13) \quad \begin{cases} a_r = k h \gamma_0^r, & a_t = k h \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{2}, \\ U_p^r = U^i \rho_0 \sum_{q=0}^{\pm\infty} (i k h \gamma_0^r)^{p+2q} \frac{C_{p+2q}^q}{(p+2q)!}, \\ U_p^t = U^i \tau_0 \sum_{q=0}^{\pm\infty} \left(i k h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^{p+2q} \frac{C_{p+2q}^q}{(p+2q)!}. \end{cases}$$

Notons bien qu'il ne s'agit là que de valeurs certainement entachées d'erreurs assez grossières. Outre le fait d'avoir négligé les fluctuations d'amplitude, les expressions (III.7) des fluctuations de phase risquent de se trouver en défaut.

En fait, cette méthode revient à l'application du principe de Huygens et, à condition d'écrire ce principe sous une forme assez rigoureuse [33], il n'est pas douteux que l'on puisse parvenir à une solution correcte, dans le cas du réseau à très basse fréquence spatiale. On pourrait en effet admettre qu'en chaque point du réseau, il y a réflexion comme sur un dioptré plan qui serait tangent au réseau. Tenant compte ainsi de l'incidence variable, les fluctuations d'amplitude ne seraient plus négligées. Il conviendrait d'estimer ensuite les fluctuations de phase pour trouver le champ total réfléchi ou transmis, sur le plan xOy . L'analyse harmonique de ce champ donnerait enfin l'amplitude de chaque champ diffracté. Nous n'avons pas poussé dans cette voie, une expression rigoureuse du principe de Huygens étant extrêmement compliquée et les expressions approchées d'une incertitude difficile à prévoir et à contrôler.

Quoi qu'il en soit, les valeurs (III.13) donnent, du moins, très simplement un ordre de grandeur des champs diffractés d'ordre élevé négligeant les termes correcteurs en μ/k et ν/k . Elles peuvent d'ailleurs présenter quelque utilité au cours d'une résolution numérique approchée des équations rigoureuses (II.2) à (II.6) ou (II.14) ou servir tout au moins à l'appréciation de l'erreur résultant de l'application de la méthode des réduites. Nous les emploierons d'autre part lors du calcul des pouvoirs de réflexion et de transmission car elles complètent les développements en série (III.4) et (III.5), en donnant les termes correcteurs en $k^2 h^2$.

4. Ondes réfléchie et réfractée. — Convenons, pour toute la suite, que le mot champ désignera le champ électrique si l'onde incidente a son champ électrique normal au plan d'incidence et le champ magnétique dans le cas opposé. Nous ne discuterons pas ici le cas particulier $\nu = 0$, c'est-à-dire celui où les sillons sont normaux au plan d'incidence, qui fera l'objet d'une étude spéciale au chapitre V.

1. Etat de polarisation. — Examinons tout d'abord l'état de polarisation des champs réfléchi et réfracté. Les expressions (II.11) et (II.17) montrent qu'ils présentent des composantes parallèles au plan d'incidence bien que le champ incident soit normal à ce plan. Les différentes composantes restant en phase, les ondes réfléchie et réfractée sont polarisées rectilignement mais, par rapport au cas du dioptré plan, les plans de polarisation ont tourné d'angles θ_0^r et θ_0^t (fig. 4) tels que

$$(III.14) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_{0\perp}^r &= \varepsilon_{0\parallel}^r / (1 + \varepsilon_{0\perp}^r), & \operatorname{tg} \theta_{0\perp}^t &= \varepsilon_{0\parallel}^t / (1 + \varepsilon_{0\perp}^t), \\ \operatorname{tg} \theta_{0\parallel}^r &= \zeta_{0\parallel}^r / (1 + \zeta_{0\perp}^r), & \operatorname{tg} \theta_{0\parallel}^t &= \zeta_{0\parallel}^t / (1 + \zeta_{0\perp}^t). \end{aligned}$$

Mais on peut négliger les $\varepsilon_{0\perp}$ ou $\zeta_{0\perp}$ et assimiler les tangentes et les angles, car les ε_0 et ζ_0 restent petits, sauf toutefois pour $\operatorname{tg} \theta_{0\parallel}^r$:

$$\theta_{0\perp}^r = \varepsilon_{0\parallel}^r, \quad \theta_{0\perp}^t = \varepsilon_{0\parallel}^t, \quad \operatorname{tg} \theta_{0\parallel}^r = \zeta_{0\parallel}^r, \quad \theta_{0\parallel}^t = \zeta_{0\parallel}^t.$$

Si le réseau est à très basse fréquence spatiale, les expressions (III.4) et (III.5) indiquent que ces angles de rotation sont proportionnels au carré de l'amplitude du profil du réseau et aux pulsations spatiales μ et ν . Remarquons que $\mu^2 + \nu^2$ étant une constante pour un réseau donné, le produit $\mu \nu$ est maximal pour $\mu^2 = \nu^2$. Donc la rotation du plan de polarisation, nulle si les sillons du réseau sont normaux ou parallèles au plan d'incidence, est maximale si les sillons font un angle de 45° avec le plan d'incidence. Si ν est positif (nous avons déjà supposé μ positif) $\theta_{0\perp}^r > 0$, $\theta_{0\perp}^t < 0$, $\theta_{0\parallel}^r < 0$ si l'angle d'incidence est inférieur à l'angle de Brewster, $\theta_{0\parallel}^r > 0$ dans le cas contraire, $\theta_{0\parallel}^t < 0$.

D'après les conventions (II.4), une rotation θ positive

signifie que, pour un observateur recevant le faisceau considéré, le plan de polarisation a tourné dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

Pour l'incidence brewsterienne, correspondant à $n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t = 0$, $\theta_{0\parallel}^r = 90^\circ$. En effet, la composante normale au plan d'incidence du champ réfléchi est éteinte et non sa composante parallèle.

Remarquons enfin que les rotations du plan de polarisation sont indépendantes de la longueur d'onde.

2. *Pouvoirs de réflexion et de transmission.* — L'application des relations (II.18) et (II.19) n'offre ici aucune difficulté puisque les ε_0 et ζ_0 sont réels.

a) *Champ électrique incident normal au plan d'incidence.* —

$$R_{\perp} = R_{0\perp} (1 + 2\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\perp}^{r^2} + \varepsilon_{0\parallel}^{r^2}), \quad T_{\perp} = T_{0\perp} (1 + 2\varepsilon_{0\perp}^t + \varepsilon_{0\perp}^{t^2} + \varepsilon_{0\parallel}^{t^2}).$$

En première approximation, les écarts relatifs entre les pouvoirs de réflexion et de transmission du réseau et du dioptré plan sont égaux à $2\varepsilon_{0\perp}^r$ ou $2\varepsilon_{0\perp}^t$.

Si le réseau est à très basse fréquence spatiale, opérons des développements en série en complétant les expressions (III.4) et (III.5) par la formule (III.13). Par contre $\varepsilon_{0\parallel}^{r^2}$ et $\varepsilon_{0\parallel}^{t^2}$ seront négligés car ils sont de l'ordre de grandeur de l'incertitude sur $\varepsilon_{0\perp}^r$ et $\varepsilon_{0\perp}^t$. On trouve

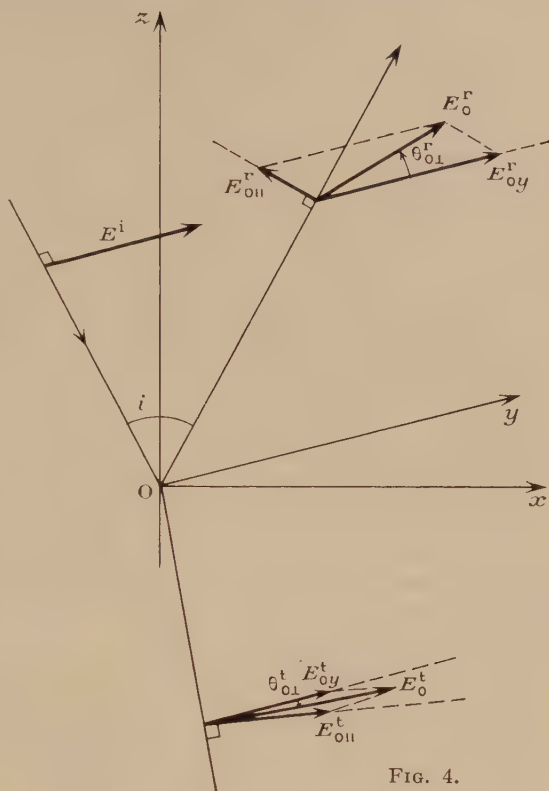


FIG. 4.

$$(III.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{R_{\perp} - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} &= -2 (k h \gamma_0^r)^2 \left(1 - \frac{\mu^2 n^2 \gamma_0^r{}^3 + \gamma_0^t{}^3}{k^2 \gamma_0^r{}^4 \gamma_0^t{}^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t \alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t}{k^2 \gamma_0^r \alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right) + \frac{3}{2} (k h \gamma_0^r)^4 + \dots, \\ \frac{T_{\perp} - T_{0\perp}}{T_{0\perp}} &= -\frac{k^2 h^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \left(1 - 2 \frac{\mu^2 n^2 \gamma_0^r{}^3 + \gamma_0^t{}^3}{k^2 \gamma_0^r{}^3 \gamma_0^t{}^3 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t}{k^2 \alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right) + \frac{3}{2} \left(k h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^4 + \dots \end{aligned} \right.$$

Ces quantités sont toutes deux négatives ; le réseau est moins réfléchissant et moins transparent qu'un dioptré plan. Elles sont, en première approximation, inversement proportionnelles à la longueur d'onde et indépendantes du pas du réseau.

Le défaut de pouvoir réflecteur, maximal sous l'incidence normale, s'annule pour l'incidence rasante, tandis que le défaut de pouvoir de transmission croît dans le rapport de $(n-1)^2$ à n^2-1 .

Remarquons que nous devons supposer que l'incidence ne devient pas excessivement rasante, sinon l'une des ondes diffractées par réflexion ne serait plus réelle et les hypothèses choisies au début de ce chapitre ne seraient plus respectées.

Des termes en μ^2/k^2 , ν^2/k^2 et $k^2 h^2$ viennent corriger les conclusions précédentes.

b) *Champ magnétique incident normal au plan d'incidence.* — Loin de l'incidence brewsterienne des conclusions analogues aux précédentes peuvent être énoncées. En première approximation,

$$(III.16) \quad \frac{R_{\parallel} - R_{0\parallel}}{R_{0\parallel}} = -2 k^2 h^2 \gamma_0^r{}^2, \quad \frac{T_{\parallel} - T_{0\parallel}}{T_{0\parallel}} = -\frac{k^2 h^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2.$$

La polarisation de l'onde incidente et le pas du réseau jouent de faibles rôles.

Mais, pour l'incidence brewsterienne, $n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t = 0$ ou $n^2 \gamma_0^r{}^2 - \alpha_0^2 = 0$. $\zeta_{0\perp}^r$ et $\zeta_{0\parallel}^r$ deviennent indéfinis, tandis que $\rho_{0\parallel} = 0$. Il faut abandonner les notations réduites et revenir aux champs eux-mêmes. On trouve alors

$$(III.17) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{0\perp B}^r &= - \left(h \frac{n^2 - 1}{4 n^2} \right)^2 \times \\ &\quad \times \left[\mu^2 \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 - 4 (2 n^2 + 1)}{n^2} + \nu^2 (n^2 + 2) (n^4 + 1) \right], \\ H_{0\parallel B}^r &= \mu \nu h^2 \left(\frac{n^2 - 1}{2 n^2} \right)^2 \sqrt{n^2 + 1}. \end{aligned} \right.$$

Il subsiste donc un champ réfléchi, polarisé en général dans une direction oblique par rapport au plan d'incidence, proportionnel au carré de l'amplitude du profil et indépendant de la longueur d'onde.

5. **Ondes diffractées.** — Les ondes diffractées d'ordre p , par réflexion et par transmission, se propagent suivant des directions déterminées respectivement par les vecteurs unitaires $\vec{u}_p^r$ et $\vec{u}_p^t$ (fig. 5) :

$$\vec{u}_p^r = \alpha_p \vec{u}_x + \beta_p \vec{u}_y + \gamma_p^r \vec{u}_z,$$

$$\vec{u}_p^t = \frac{1}{n} (\alpha_p \vec{u}_x + \beta_p \vec{u}_y + \gamma_p^t \vec{u}_z).$$

Le plan de diffraction d'ordre p , plan passant par la normale moyenne du dioptre et contenant $\vec{u}_p^r$ et $\vec{u}_p^t$ est différent du plan d'incidence. Le rectiligne ψ_p du dièdre qu'il forme avec lui est tel que $\text{tg } \psi_p = \beta_p / \alpha_p$.

Les différentes composantes des champs diffractés restant en phase, ceux-ci sont polarisés rectilignement. Désignons par $\vec{e}_{p\perp}$ le vecteur unitaire normal au plan de diffraction, orienté dans le sens du produit vectoriel $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_p$ et $\vec{e}_{p\parallel}$ le vecteur unitaire du plan de diffraction dans le sens déterminé par le produit $\vec{u}_p \wedge \vec{e}_{p\perp}$:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{p\perp}^r &= \vec{e}_{p\perp}^t = (-\beta_p \vec{u}_x + \alpha_p \vec{u}_y) / \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}, \\ \vec{e}_{p\parallel}^r &= [-\alpha_p \gamma_p^r \vec{u}_x - \beta_p \gamma_p^r \vec{u}_y + (\alpha_p^2 + \beta_p^2) \vec{u}_z] / \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}, \\ \vec{e}_{p\parallel}^t &= [-\alpha_p \gamma_p^t \vec{u}_x - \beta_p \gamma_p^t \vec{u}_y + (\alpha_p^2 + \beta_p^2) \vec{u}_z] / n \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}. \end{aligned}$$

Estimons les champs diffractés suivant ces vecteurs unitaires. D'après (II.10), quand le champ électrique incident est normal au plan d'incidence, les champs diffractés du premier ordre admettent les composantes

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s\perp}^r &= \varepsilon_{s\perp}^t = i k h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_s^r - \gamma_s^t} \frac{\alpha_s}{\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}, \\ \varepsilon_{s\parallel}^r &= i s v h \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \frac{\gamma_s^t}{\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}, \\ \varepsilon_{s\parallel}^t &= i s v h \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \frac{n \gamma_s^r}{\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}. \end{aligned}$$

Les champs diffractés font avec les vecteurs $\vec{e}_{p\perp}$ des angles $\theta_{s\perp}^r$ et $\theta_{s\perp}^t$ tels que

$$\text{tg } \theta_{s\perp}^r = \frac{\varepsilon_{s\parallel}^r}{\varepsilon_{s\perp}^r} = \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \frac{\beta_s \gamma_s^t}{\alpha_s}, \quad \text{tg } \theta_{s\perp}^t = \frac{\varepsilon_{s\parallel}^t}{\varepsilon_{s\perp}^t} = \frac{\gamma_s^r - \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t} \frac{n \beta_s \gamma_s^r}{\alpha_s}.$$

Il apparaît que l'orientation du champ diffracté dépend seulement des rapports μ/k et v/k , mais non de l'amplitude du profil du réseau.

Notons une particularité de l'onde diffractée d'ordre -1 . Pour une incidence telle que $\alpha_{-1} = \alpha_0 - (\mu/k) = 0$, le plan de diffraction est normal au plan d'incidence et le champ diffracté est dans le plan de diffraction.

Les intensités diffractées I_s^r et I_s^t peuvent être estimées soit par

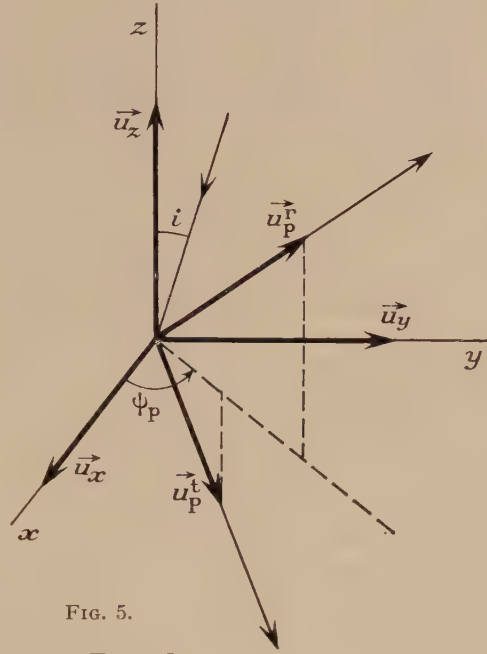


FIG. 5.

$$I_{s\perp}^r = I^i (\varepsilon_{s\perp}^r \varepsilon_{s\perp}^{r*} + \varepsilon_{s\parallel}^r \varepsilon_{s\parallel}^{r*}), \quad I_{s\perp}^t = I^i n (\varepsilon_{s\perp}^t \varepsilon_{s\perp}^{t*} + \varepsilon_{s\parallel}^t \varepsilon_{s\parallel}^{t*}),$$

soit par

$$I_{s\perp}^r = I^i (\varepsilon_{sx}^r \varepsilon_{sx}^{r*} + \varepsilon_{sy}^r \varepsilon_{sy}^{r*} + \varepsilon_{sz}^r \varepsilon_{sz}^{r*}), \quad I_{s\perp}^t = I^i n (\varepsilon_{sx}^t \varepsilon_{sx}^{t*} + \varepsilon_{sy}^t \varepsilon_{sy}^{t*} + \varepsilon_{sz}^t \varepsilon_{sz}^{t*}).$$

I^i désignant l'intensité de l'onde incidente. L'une ou l'autre expression conduit à

$$I_{s\perp}^r = I^i [k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)]^2 \frac{(\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)^2 + \beta_s^2 (n^2 - \beta_s^2)}{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)^2},$$

$$I_{s\perp}^t = I^i n [k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)]^2 \frac{(\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)^2 + \beta_s^2 (1 - \beta_s^2)}{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)^2}$$

ou, pour un réseau de très basse fréquence,

$$I_{s\perp}^r = \frac{I_{s\perp}^t}{n} = I^i \left(k h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \right)^2 \left(1 - 2 s \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right),$$

valeur proportionnelle aux carrés du nombre d'ondes et de l'amplitude du profil du réseau, mais dépendant peu de sa fréquence spatiale.

Lorsque le champ magnétique incident est normal au plan d'incidence,

$$\zeta_{s\perp}^r = -i k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r (\alpha_s^2 + \beta_s^2) n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \gamma_s^t \alpha_s}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t) \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t) \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}},$$

$$\zeta_{s\parallel}^r = -i s v h \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\gamma_s^r + \gamma_s^t}{\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}},$$

$$\zeta_{s\perp}^t = -i k h n^2 \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r (\alpha_s^2 + \beta_s^2) \alpha_0 - \gamma_0^t \gamma_s^r \alpha_s}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t) \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}},$$

$$\zeta_{s\parallel}^t = i s v h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - n^2 \gamma_s^r \gamma_s^t}{n (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t) \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}}.$$

Ces champs sont polarisés suivant des directions faisant avec $e_{p\perp}$ des angles $\theta_{s\parallel}^r$ et $\theta_{s\parallel}^t$ tels que

$$\operatorname{tg} \theta_{s\parallel}^r = -\gamma_0^t \beta_s \frac{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t}{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \gamma_s^t \alpha_s},$$

$$\operatorname{tg} \theta_{s\parallel}^t = -\frac{\gamma_0^t \beta_s}{n (n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)} \frac{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - n^2 \gamma_s^r \gamma_s^t}{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) \alpha_0 - \gamma_0^t \gamma_s^r \alpha_s}$$

et leur intensité est

$$I_{s\parallel}^r = I^i \left[k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{n^4 \alpha_0^2 (\alpha_s^2 + \beta_s^2) - 2 n^2 \alpha_0 \alpha_s \gamma_0^t \gamma_s^t + \gamma_0^{t^2} [n^2 - \alpha_s^2 - \beta_s^2 (\gamma_s^r + \gamma_s^t)]}{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)^2},$$

$$I_{s\parallel}^t = I^i n \left[k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{n^2 \alpha_0^2 (\alpha_s^2 + \beta_s^2) - 2 \alpha_0 \alpha_s \gamma_0^t \gamma_s^t + \gamma_0^{t^2} [1 - \alpha_s^2 - 2 \beta_s^2 \gamma_s^r (\gamma_s^r + \gamma_s^t)]}{(n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t)^2}$$

ou, sous forme approchée,

$$I_{s\parallel}^r = I^i \left(k h \gamma_0^r \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right)^2 \left(1 + 2 s \frac{\mu}{k n} \frac{n^2 \alpha_0}{\gamma_0^{r^2} - \alpha_0^2 \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right),$$

$$I_{s||}^t = I^i \left(k h n^2 \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right)^2 \left(1 - 2 s \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{1}{\gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right).$$

Nous observons que l'intensité diffractée par réflexion s'annule à l'incidence brewsterienne, à $\mu^2 h^2$ ou $v^2 h^2$ près. Si nous voulons chercher plus précisément le champ résiduel, reportons-nous aux expressions (III.5)

$$\zeta_{sxB}^r = i \frac{s v h n^2 - 1}{2 n n^2 + 1}, \quad \zeta_{syB}^r = -i s \mu h \frac{n^4 - 1}{n^3}, \quad \zeta_{szB}^r = -i \frac{s v h n^2 - 1}{2 n^2 + 1},$$

d'où l'intensité diffractée I_{sB}^r , lorsque se trouve réalisée l'incidence brewsterienne :

$$I_{sB}^r = \frac{h^2 (n^2 - 1)^2}{n^2 n^2 + 1} \left[\mu^2 \frac{(n^2 + 1)^3}{n^4} + \frac{v^2}{4} \right].$$

6. Milieux matériels non transparents. — Quelles modifications apporter aux conclusions précédentes si le milieu sur lequel est tracé le réseau n'est plus un diélectrique transparent ? L'indice de ce milieu étant complexe, ainsi que les γ_p^t , les différentes composantes des champs ne sont plus en phase, donc le réseau produit des ondes elliptiques.

Les défauts relatifs de pouvoirs de réflexion et de transmission deviennent, en adoptant les notations (I.32),

$$\frac{R - R_0}{R_0} = -2 k^2 h^2 \gamma_0^r{}^2, \quad \frac{T - T_0}{T_0} = -k^2 h^2 \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 - \gamma_0'^2}{2},$$

expressions valables, au degré d'approximation μ^2/k^2 , v^2/k^2 ou $k^2 h^2$ près, quelle que soit la polarisation de l'onde incidente. On voit que l'absorption ne modifie pas sensiblement le défaut relatif de pouvoir réflecteur mais affecte évidemment le pouvoir de transmission. Celui-ci présente un défaut qui reste inversement proportionnel à la longueur d'onde si l'absorption n'est pas sélective.

IV. Réseau de haute fréquence spatiale

Nous supposons maintenant le pas du réseau suffisamment petit pour que toutes les ondes diffractées soient évanescentes. La condition suffisante est manifestement

$$(IV.1) \quad n^2 - [\alpha_0 - (\mu/k)]^2 - (v^2/k^2) < 0,$$

c'est-à-dire γ_{-1}^{t2} négatif car, à fortiori, les autres γ_p^{r2} et γ_p^{t2} le sont également, sauf évidemment γ_0^{r2} et γ_0^{t2} . Les γ_p , imaginaires par conséquent, prennent les valeurs (I.8). Notons

$$v_p^r = \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2 - 1}, \quad v_p^t = -\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2 - n^2},$$

de façon que

$$(IV.2) \quad \gamma_p^r = -i v_p^r, \quad \gamma_p^t = -i v_p^t.$$

Pour que les solutions du chapitre II puissent s'appliquer, il faut que les quantités $k h \gamma_p$ restent petites. Si la fréquence spatiale du réseau est très grande, ces quantités sont de l'ordre de $p h \sqrt{\mu^2 + v^2}$. Or $h \sqrt{\mu^2 + v^2}$ représente la pente maximale de la tangente au profil du réseau. C'est donc cette pente qu'il faut supposer petite.

Le principe de conservation de l'énergie se vérifie, à $\mu^4 h^4$ ou $\nu^4 h^4$ près, avec une extrême facilité puisqu'il n'y a plus d'ondes diffractées réelles. L'énergie incidente se trouve seulement répartie entre les ondes réfléchie et réfractée. Or $\varepsilon_{0\perp}^r$, $\varepsilon_{0\perp}^{r*}$ et $\varepsilon_{0\parallel}^r$, $\varepsilon_{0\parallel}^{r*}$ sont négligeables dans (II.8). Il s'agit donc de s'assurer que

$$(IV.3) \quad \gamma_0^r \rho_{0\perp}^2 (\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\perp}^{r*}) - \gamma_0^t \tau_{0\perp}^2 (\varepsilon_{0\perp}^t + \varepsilon_{0\perp}^{t*}) = 0.$$

Or, dans les solutions générales (II.11) les quantités sous le signe $\sum_{s=\pm 1}$ sont imaginaires. Donc

$$\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\perp}^{r*} = 2 k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t, \quad \varepsilon_{0\perp}^t + \varepsilon_{0\perp}^{t*} = \frac{1}{2} k^2 h^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2$$

et, compte tenu des valeurs (II.1) des facteurs de réflexion et de transmission, la relation (IV.3) devient évidente.

La condition (II.15), de la même manière, s'écrit

$$\gamma_0^r \rho_{0\parallel}^{\prime 2} (\zeta_{0\perp}^r + \zeta_{0\perp}^{r*}) - \gamma_0^t \frac{\tau_{0\parallel}^{\prime 2}}{n^2} (\zeta_{0\perp}^t + \zeta_{0\perp}^{t*}) = 0$$

et se vérifie aussi facilement.

1. Réseau de très haute fréquence spatiale. — Si la fréquence spatiale du réseau est très élevée, $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ est très supérieur au nombre d'ondes k et v_p^r , v_p^t peuvent être développés en séries :

$$(IV.4) \quad v_p^r = |p| \frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{k} \left[1 + \frac{\mu k \alpha_0}{p (\mu^2 + \nu^2)} - \frac{k^2 (\mu^2 + \nu^2 \gamma_0^r)^2}{2 p^2 (\mu^2 + \nu^2)^2} + \dots \right],$$

$$v_p^t = -|p| \frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{k} \left[1 + \frac{\mu k \alpha_0}{p (\mu^2 + \nu^2)} - \frac{k^2 (\mu^2 n^2 + \nu^2 \gamma_0^t)^2}{2 p^2 (\mu^2 + \nu^2)^2} + \dots \right].$$

Comme dans le chapitre III, nous ne supposons rien sur les valeurs relatives de $k h$ et de $k/\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$; aussi ne savons-nous pas jusqu'où il faudrait pousser ces développements en séries. Pour un problème numérique donné, il conviendrait d'écarter les termes d'un ordre de grandeur relatif inférieur à $k^2 h^2$.

Une difficulté surgit, qui ne se produisait pas à propos du réseau de basse fréquence spatiale ; bien que $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ soit supposé grand, μ ou ν , séparément, peuvent être petits si les sillons du réseau sont orientés dans des directions voisines de la parallèle ou de la normale au plan d'incidence. Nous noterons $K = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ et δ l'angle, compris entre 0° et 180° , des sillons avec le plan d'incidence, de façon que

$$(IV.5) \quad \mu = K \sin \delta, \quad \nu = -K \cos \delta.$$

2. Réflexion et réfraction. — Les expressions (II.11) et (II.17) des champs réfléchi et réfracté étant complexes, cela signifie que les ondulations du dioptré provoquent des variations simultanées d'amplitude et de phase et ces dernières n'étant pas identiques pour les diverses composantes, les ondes correspondantes sont, en général, elliptiques. Afin de préciser ce phénomène de dépolarisation, appliquons les solutions générales (II.11) et (II.17) au cas d'un réseau de très haute fréquence spatiale.

1. Champ électrique incident normal au plan d'incidence. —

$$(IV.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{0\perp}^r = -i k K h^2 \gamma_0^r \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 \delta + i \frac{k}{K} \gamma_0^t + \dots \right), \\ \varepsilon_{0\perp}^t = -i k K h^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 \delta + i \frac{k}{K} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} + \dots \right), \\ \varepsilon_{0\parallel}^r = \varepsilon_{0\parallel}^t = -i \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \times \\ \quad \times \sin 2\delta \left[1 - \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} + \frac{3}{2} \alpha_0^2 \cos^2 \delta \right) + \dots \right]. \end{array} \right.$$

Les retards de phase des différentes composantes par rapport au champ incident sont sensiblement :

$$\begin{aligned} \varphi_{0\perp}^r &= k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \gamma_0^r \cos^2 \delta, & \varphi_{0\perp}^t &= k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \cos^2 \delta, \\ \varphi_{0\parallel}^r &= \varphi_{0\parallel}^t = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } 0 < \delta < \pi/2, \\ \pi/2 & \text{si } \pi/2 < \delta < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

(nous ne tenons pas compte du déphasage de π à la réflexion que subissent les deux composantes $E_{0\perp}^r$ et $E_{0\parallel}^r$).

Ecartons le cas $\delta = 90^\circ$, c'est-à-dire les sillons du réseau normaux au plan d'incidence, où il n'y a pas de dépolarisation. Pour toute autre valeur de δ , $\varphi_{0\perp}^r$ et $\varphi_{0\perp}^t$ ne sont pas nuls, mais restent faibles, tandis que $\varphi_{0\parallel}^r$ et $\varphi_{0\parallel}^t$ valent 90° . Autrement dit, les composantes $E_{0\perp}^r$ et $E_{0\perp}^t$, $E_{0\parallel}^r$ et $E_{0\parallel}^t$ sont presque en quadrature et les ondes réfléchie et réfractée portent des vibrations elliptiques dont les grands axes sont presque parallèles à Oy ou, plus précisément, font avec Oy les angles

$$\begin{aligned} \theta_{0\perp}^r &= \left(k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \gamma_0^r \right)^2 \frac{\gamma_0^t}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sin \delta \cos^3 \delta, \\ \theta_{0\perp}^t &= \frac{k^2 K^2 h^4}{2} \frac{(n^2 - 1)^3}{(n^2 + 1)^2} \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \sin \delta \cos^3 \delta \end{aligned}$$

proportionnels au carré du nombre d'ondes, au carré de la fréquence spatiale du réseau, à la puissance 4 de l'amplitude du profil et maximaux si $\delta = \pm 30^\circ$. Remarquons que nous avons conservé la même notation θ pour repérer la position du grand axe de la vibration elliptique que dans le précédent chapitre pour estimer l'angle de la vibration rectiligne avec Oy , car pour un expérimentateur, c'est, dans les deux cas, l'angle dont il doit tourner un analyseur pour observer l'intensité maximale. Mais dans le cas présent les θ ne sont plus donnés par (III.14). Il est facile de calculer que

$$\theta_{0\perp} = |\varepsilon_{0\parallel}|/(1 + \varepsilon_{0\perp}) |\cos(\varphi_{0\parallel} - \varphi_{0\perp})|.$$

Quant à l'ellipticité de l'onde, elle s'exprime par

$$e_{0\perp} = |\varepsilon_{0\parallel}|/(1 + \varepsilon_{0\perp}) |\sin(\varphi_{0\parallel} - \varphi_{0\perp})|$$

et s'écrit par conséquent, sous forme approchée,

$$e_{0\perp}^r = e_{0\perp}^t = \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sin 2\delta.$$

Elle est maximale si $\delta = 45^\circ$.

Le pouvoir réflecteur s'obtient par application de la relation (II.18) où nous ne négligeons aucun terme

$$\frac{R_\perp - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} = k^2 h^2 \left[2 \gamma_0^r \gamma_0^t + \left(K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \gamma_0^r \cos^2 \delta \right)^2 \left(1 + \frac{\gamma_0^{t^2} \operatorname{tg}^2 \delta}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \right) + \dots \right],$$

$$(IV.7) \quad \frac{T_\perp - T_{0\perp}}{T_{0\perp}} = k^2 h^2 \left\{ \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2}{2} + \left(K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 \delta \right)^2 \left[\frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2}{2} + \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t \operatorname{tg}^2 \delta}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \right] + \dots \right\}.$$

Nous voyons que le réseau est moins réfléchissant qu'un dioptré plan [il ne faut pas oublier que γ_0^t , d'après sa définition (I.9), est négatif tandis que γ_0^r est positif] mais, par contre, plus transparent. Ce résultat peut paraître, à priori, paradoxal, mais se comprend bien du point de vue énergétique puisque l'énergie incidente se répartit uniquement, en régime permanent, entre les faisceaux réfléchis et réfractés. En première approximation les écarts relatifs entre $R_\perp$ et $R_{0\perp}$, $T_\perp$ et $T_{0\perp}$ sont proportionnels au carré du nombre d'ondes, au carré de l'amplitude du profil du réseau, mais indépendants de sa fréquence spatiale. Le défaut relatif de pouvoir réflecteur, maximal sous l'incidence normale, s'annule sous l'incidence rasante. L'écart relatif du pouvoir de transmission est sensiblement l'opposé de celui qui se produit avec un réseau à basse fréquence spatiale.

2. *Champ magnétique incident normal au plan d'incidence.* — Les solutions (II.17) admettent les développements en série

$$(IV.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_{0\perp}^r &= -i k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^{r^2} - \alpha_0^2} \left[n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{t^2} \sin^2 \delta + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{k}{K} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} n^2 \gamma_0^t \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right) + \dots \right], \\ \zeta_{0\parallel}^r &= i \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \sin 2 \delta \left[1 + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} - \frac{3}{2} \alpha_0^2 \cos^2 \delta \right) + \dots \right], \\ \zeta_{0\perp}^t &= -i \frac{k K h^2}{2} \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left[\frac{\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t \sin^2 \delta}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{k}{2 K} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right) + \dots \right], \\ \zeta_{0\parallel}^t &= i \frac{k K h^2}{4 n} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \gamma_0^t \times \\ &\quad \times \sin 2 \delta \left[1 + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} - \frac{3}{2} \alpha_0^2 \cos^2 \delta \right) + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Les composantes des champs magnétiques réfléchis et réfractés présentent, par rapport au champ incident, des retards de phase tels que

$$\operatorname{tg} \varphi_{0\perp}^r = \frac{k K h^2 \gamma_0^r (n^2 - 1) (n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{t2} \sin^2 \delta)}{(n^2 + 1) (n^2 \gamma_0^{r2} - \alpha_0^2) + k^2 h^2 n^2 \gamma_0^r \gamma_0^t (n^2 + 1 - 4 \alpha_0^2)},$$

$$\varphi_{0\perp}^t = \frac{k K h^2}{4 n} \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^{t2})^2} (\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t \sin^2 \delta),$$

$$\varphi_{0\parallel}^r = \varphi_{0\parallel}^t = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < \delta < \pi/2, \\ -\pi/2 & \text{si } \pi/2 < \delta < \pi. \end{cases}$$

Loin de l'incidence brewsterienne, les ondes réfléchie et réfractée portent, comme dans le précédent cas de polarisation, des vibrations elliptiques aplaties dont les grands axes font avec Oy les angles

$$\theta_{s\parallel}^r = \left(k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r}{\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t} \right)^2 \frac{n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{t2} \sin^2 \delta}{2 (\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t)} \gamma_0^t \sin 2 \delta,$$

$$\theta_{s\parallel}^t = \left(k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{4 n} \right)^2 \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t \sin^2 \delta}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \gamma_0^t \sin 2 \delta,$$

tandis que leur ellipticité s'exprime par

$$e_{0\parallel}^r = \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t}{\alpha_0^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t} \sin 2 \delta, \quad e_{0\parallel}^t = k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{4 n} \gamma_0^t \sin 2 \delta,$$

maximale, par conséquent, si $\delta = 45^\circ$.

Par application de la relation (II.19), on trouve

$$(IV.9) \quad \frac{R_{\parallel} - R_{0\parallel}}{R_{0\parallel}} = 2 k^2 h^2 \frac{n^2 \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^{r2} - \alpha_0^2} \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right),$$

$$\frac{T_{\parallel} - T_{0\parallel}}{T_{0\parallel}} = k^2 h^2 \frac{n^2 - 1}{2} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right).$$

Au voisinage de l'incidence brewsterienne, les vibrations elliptiques ne sont plus aplaties et leur grand axe peut s'écarter d'une manière appréciable de Oy , car $H_{0\perp}^r$ et $H_{0\parallel}^r$ ont des ordres de grandeur voisins.

Lorsque l'incidence brewsterienne est exactement réalisée,

$$H_{0\perp B}^r = -i H^i \frac{k K h^2}{4} \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^{3/2}} \left(1 + \sin^2 \delta - i \frac{k}{K} \frac{n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right),$$

$$H_{0\parallel B}^r = i H^i \frac{k K h^2}{4} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 \sin 2 \delta,$$

champ elliptique très aplati dont le grand axe fait avec Oy un angle tel que

$$\operatorname{tg} \theta_{0\parallel B}^r = - \frac{\sin 2 \delta}{1 + \sin^2 \delta} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Cet angle, nul pour $\delta = 0$ ou 90° , est maximal pour $\sin \delta = 1/\sqrt{3}$, soit pour $\delta = 35^\circ$, et indépendant à la fois de la longueur d'onde et du pas du réseau.

L'ellipticité de cette onde est

$$e_{0B} = - \frac{k}{K} \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \frac{\sin 2 \delta}{n^2 + 1 + 4 \sin^2 \delta}.$$

Le pouvoir réflecteur résiduel du dioptre,

$$R_B = \left(\frac{k K h^2}{4} \right)^2 \frac{(n^2 - 1)^4}{(n^2 + 1)^3} \left[(1 + \sin^2 \delta)^2 + \frac{\sin^2 2\delta}{n^2 + 1} \right],$$

n'est pas nécessairement le minimum, mais s'en trouve vraisemblablement très voisin.

3. Réflexion totale. — Nous admettions jusqu'ici que le milieu matériel était celui situé du côté des z négatifs, donc recevait le faisceau incident. Si c'est l'inverse qui se trouve réalisé, rien n'est changé, sur le plan formel, dans nos équations et solutions, l'indice n devient seulement un nombre inférieur à 1. Mais physiquement peut se produire la réflexion totale. Avec un dioptre plan celle-ci survient à partir de l'incidence limite déterminée par $\sin i_1 = n$; donc, dans notre système de notations,

$$\alpha_{01} = n, \quad \gamma_{01}^r = \sqrt{1 - n^2}, \quad \gamma_{01}^t = 0.$$

Avec un réseau, aussi bien qu'avec un dioptre plan, l'onde réfractée devient évanescente à partir de cette incidence. Cependant, la réflexion n'est pas nécessairement totale. En effet, les solutions générales (II.14) et (II.17) montrent que les champs réfléchis réduits ne s'annulent pas. Par exemple,

$$\varepsilon_{011}^r = -\frac{k^2 h^2}{2} (1 - n^2)^{3/2} \sum_{s=\pm 1} \frac{\alpha_{s1}^2 - \gamma_{s1}^r \gamma_{s1}^t}{n^2 \gamma_{s1}^r - \gamma_{s1}^t}.$$

γ_{01}^t étant nul, γ_{11}^t est nécessairement imaginaire. Mais si la fréquence spatiale du réseau est peu élevée, il peut se faire que γ_{11}^r et les γ_{-11} restent réels. ε_{011}^r posséderait alors une partie réelle et le pouvoir réflecteur serait différent de 1. Par conséquent, la réflexion totale ne coïncide pas nécessairement avec la disparition du faisceau réfracté. Cela se comprend aisément du point de vue énergétique. La réflexion ne peut être totale que si le réseau ne diffracte aucune onde à l'infini. Analytiquement, il faut et il suffit pour cela que soient simultanément réalisées les deux conditions

$$n^2 - \alpha_0^2 \leq 0, \quad 1 - [\alpha_0 - (\mu/k)]^2 - (v^2/k^2) \leq 0,$$

car γ_0^t et γ_{-1}^r sont alors imaginaires (ou nuls) ainsi, à fortiori, que tous les autres coefficients γ , sauf γ_0^r . ε_{011}^r par exemple devient purement imaginaire et s'écrit, en notant $\gamma_0^t = -i v_0^t$,

$$\varepsilon_{011}^r = -i k^2 h^2 \gamma_0^r \left(v_0^t - \frac{n^2 - 1}{2} \sum_{s=\pm 1} \frac{\alpha_s^2 + v_s^r v_s^t}{n^2 v_s^r - v_s^t} \right).$$

Le réseau ne se distingue plus du dioptre plan que par une valeur différente du déphasage à la réflexion et par une légère dépolarisation.

4. Milieux absorbants. — Dans le cas d'un réseau de basse fréquence spatiale, nous avons trouvé que l'absorption du milieu matériel n'avait pas de répercussion sensible sur le défaut relatif de pouvoir réflecteur. Il apparaît immédiatement qu'il en va différemment pour un réseau de haute fréquence spatiale. En effet, l'introduction des valeurs complexes (I.31) et (I.32) de n et de γ_0^t dans les solutions (IV.6) et (IV.8) fait apparaître dans ε_{011}^r et ζ_{011}^r des termes réels en $k K h^2$ qui n'existaient pas avec un milieu transparent. Ecrivons, par exemple,

$$\varepsilon_{0\perp}^r = - \frac{k K h^2 \gamma_0^r \cos^2 \delta}{(n'^2 - \kappa^2 + 1)^2 + 4 n'^2 \kappa^2} \left\{ 4 n' \kappa + i [(n'^2 + \kappa^2)^2 - 1] \right\} + \\ + k^2 h^2 \gamma_0^r (\gamma_0' - i \gamma_0'') + \dots,$$

d'où

$$\frac{R_{1\perp} - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} = - k K h^2 \frac{8 n' \kappa \gamma_0^r \cos^2 \delta}{(n'^2 - \kappa^2 + 1)^2 + 4 n'^2 \kappa^2} + 2 k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0' + \dots$$

Si le coefficient d'absorption κ est indépendant de la longueur d'onde et n'est pas extrêmement petit, le défaut relatif de pouvoir réflecteur devient proportionnel au nombre d'ondes, à la fréquence spatiale du réseau et au carré de l'amplitude du profil.

Le même effet se constaterait dans le second cas de polarisation.

3. Ondes diffractées. — 1. *Champ électrique incident normal au plan d'incidence.* — Les ondes diffractées sont, par hypothèse, évanescentes :

$$\vec{C}_p = \vec{E}_p \exp(-k v_p z) \exp[-i k (\alpha_p x + \beta_p y)].$$

Les plans d'égale amplitude sont parallèles au plan moyen du réseau et, v_p^r étant positif, v_p^t négatif, l'amplitude décroît bien lorsque l'on s'en éloigne. La phase se propage suivant la direction parallèle à ce plan et faisant avec Ox l'angle ψ_p tel que

$$\operatorname{tg} \psi_p = \frac{\beta_p}{\alpha_p} = - p \frac{K}{k} \frac{\cos \delta}{\alpha_0 + p (K/k) \sin \delta}.$$

On voit que cette direction reste voisine de la normale aux sillons du réseau, le sens de propagation se déduisant de Ox par une rotation de $\delta - s$ ($\pi/2$).

En introduisant les notations (IV.2) dans les solutions (II.10), les champs diffractés dans les premiers ordres, $2 = \pm 1$, s'expriment par

$$(IV.10) \quad \begin{cases} \varepsilon_{sx}^r = \varepsilon_{sx}^t = k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \alpha_s \beta_s / (n^2 v_s^r - v_s^t), \\ \varepsilon_{sy}^r = \varepsilon_{sy}^t = - k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) (\alpha_s^2 + v_s^r v_s^t) / (n^2 v_s^r - v_s^t), \\ \varepsilon_{sz}^r = i k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \beta_s v_s^t / (n^2 v_s^r - v_s^t), \\ \varepsilon_{sz}^t = i k h \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \beta_s v_s^r / (n^2 v_s^r - v_s^t). \end{cases}$$

Si la fréquence spatiale du réseau est élevée et si les sillons font un angle appréciable avec le plan d'incidence,

$$(IV.11) \quad \alpha_s \simeq s \frac{K}{k} \sin \delta, \quad \beta_s \simeq -s \frac{K}{k} \cos \delta, \quad v_s^r \simeq -v_s^t \simeq \frac{K}{k}$$

et, dans ces conditions,

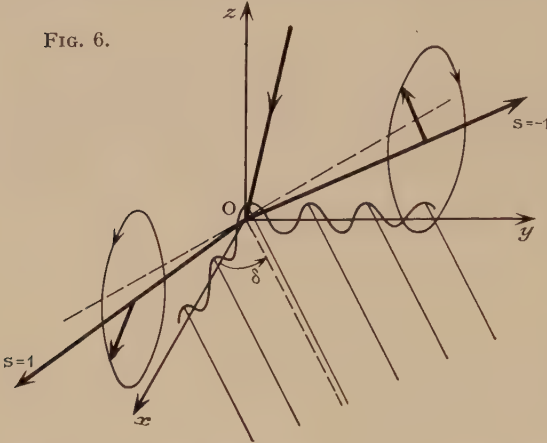
$$(IV.12) \quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_s^r \simeq - K h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \cos \delta (\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y + i s \vec{u}_z), \\ \vec{\varepsilon}_s^t \simeq - K h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \cos \delta (\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y - i s \vec{u}_z). \end{cases}$$

Sous cette forme, il apparaît que les champs se situent sensiblement dans un plan normal aux sillons du réseau. Leurs composantes parallèles et normales au plan moyen du dioptré ayant des amplitudes égales et se trouvant en quadrature, ils sont donc polarisés circulairement. Leur amplitude est proportionnelle à la pente

maximale du profil sinusoïdal et indépendante de la longueur d'onde. Elle s'annule sous l'incidence rasante.

Notons bien une différence profonde entre ces ondes et l'onde circulaire ordinaire produite, par exemple, par une lame quart d'onde recevant normalement

FIG. 6.



une vibration rectiligne à 45° de ses lignes neutres. Celle-ci est une onde transversale alors que celles auxquelles le réseau donne naissance comportent des composantes longitudinales. Le plan de chaque vibration circulaire fait même un angle très faible avec la direction de propagation de la phase puisque l'un et l'autre sont presque normaux aux sillons (fig. 6). D'autre part, le rayon lumineux ne se confond pas avec la direction de propa-

gation de la phase. Son sens et le flux moyen d'énergie qu'il transporte sont indiqués par le vecteur de Poynting [34]

$$\vec{P} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*),$$

Re désignant la partie réelle. Le champ magnétique $\vec{\mathcal{H}}$ se calcule grâce à la relation (I.10) et on trouve

$\vec{\mathcal{E}}_s \wedge \vec{\mathcal{H}}_s^* = E^{i2} e^{-2kv_s z} \{ [\epsilon_{sy} (\epsilon_{sx}^* \alpha_s - \epsilon_{sx}^* \beta_s) - \epsilon_{sz} (-i \epsilon_{sx}^* v_s - \epsilon_{sz}^* \alpha_s)] \vec{u}_x + \dots \}$, les autres composantes s'obtenant par permutation circulaire entre les champs réduits d'une part, entre les coefficients $\alpha_s, \beta_s, i v_s$ d'autre part. Mais ϵ_{sx} et ϵ_{sy} sont réels tandis que ϵ_{sz} est imaginaire. Donc

$$(IV.13) \quad \vec{P}_s = \frac{c E^{i2}}{8\pi} e^{-2kv_s z} \{ [(\epsilon_{sy}^2 + |\epsilon_{sz}|^2) \alpha_s - \epsilon_{sx} \epsilon_{sy} \beta_s - i \epsilon_{sx} \epsilon_{sz} v_s] \vec{u}_x + [(|\epsilon_{sz}|^2 + \epsilon_{sx}^2) \beta_s - i \epsilon_{sy} \epsilon_{sz} v_s - \epsilon_{sy} \epsilon_{sx} \alpha_s] \vec{u}_y \}.$$

En portant dans cette expression les valeurs (IV.10) des champs [les formes approchées (IV.12) ne seraient pas assez précises], on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{P}_s^r &= \frac{c E^{i2}}{8\pi} e^{-2kv_s^r z} \left[k h \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 v_s^r - v_s^t} \right]^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\left(\frac{n^2 v_s^r - v_s^t}{v_s^r - v_s^t} \right)^2 - n^2 \beta_s^2 \right] \alpha_s \vec{u}_x + (n^2 \alpha_s^2 + v_s^{t2}) \beta_s \vec{u}_y \right\}, \\ \vec{P}_s^t &= \frac{c E^{i2}}{8\pi} e^{-2kv_s^t z} \left[k h \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 v_s^r - v_s^t} \right]^2 \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\left(\frac{n^2 v_s^r - v_s^t}{v_s^r - v_s^t} \right)^2 - \beta_s^2 \right] \alpha_s \vec{u}_x + (\alpha_s^2 + n^2 v_s^{r2}) \beta_s \vec{u}_y \right\} \end{aligned}$$

ou, sous forme approchée, pour un réseau de haute fréquence spatiale

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_s^r = & -s \frac{c E^{12}}{8 \pi} e^{-2k v_s^r z} k K h^2 \left(\gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \right)^2 \times \\
 & \times \cos \delta \left[\frac{n^2}{2} \sin 2 \delta \vec{u}_x + (1 + n^2 \sin^2 \delta) \vec{u}_y \right], \\
 \vec{P}_s^t = & -s \frac{c E^{12}}{8 \pi} e^{-2k v_s^t z} k K h^2 \left(\gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \right)^2 \times \\
 & \times \cos \delta \left[\frac{\sin 2 \delta}{2} \vec{u}_x + (n^2 + \sin^2 \delta) \vec{u}_y \right]
 \end{aligned}
 \tag{IV.14}$$

à condition que δ ne soit pas voisin de 90° . Chaque onde évanescence transporte donc de l'énergie suivant une direction parallèle au plan moyen du réseau, dont l'orientation dépend de l'obliquité des sillons sur le plan d'incidence.

Il est facile de se représenter l'état ondulatoire au voisinage de la surface du réseau. Considérons le cas particulier de l'incidence normale. La phase d'une onde évanescence se propage alors normalement aux sillons, dans un sens ou dans l'autre suivant que son ordre de diffraction est 1 ou -1 . Il s'établit donc des ondes stationnaires

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_1^r + \vec{C}_{-1}^r = & 2 k h \frac{n-1}{n^2 v_1^r - v_1^t} \{ [-\alpha_1 \beta_1 \vec{u}_x + (\alpha_1^2 + v_1^r v_1^t) \vec{u}_y] \cos (\mu x + \nu y) + \\
 & + \beta_1 v_1^t \sin (\mu x + \nu y) \vec{u}_z \} e^{-k v_1^r z}, \\
 \vec{C}_1^t + \vec{C}_{-1}^t = & 2 k h \frac{n-1}{n^2 v_1^r - v_1^t} \{ [-\alpha_1 \beta_1 \vec{u}_x + (\alpha_1^2 + v_1^r v_1^t) \vec{u}_y] \cos (\mu x + \nu y) + \\
 & + \beta_1 v_1^r \sin (\mu x + \nu y) \vec{u}_z \} e^{-k v_1^t z},
 \end{aligned}
 \tag{IV.15}$$

dont les nœuds et les ventres se situent sur les extrema du profil sinusoïdal. Les nœuds de la composante suivant Oz coïncident avec les ventres de la composante normale à Oz puisque ces deux composantes sont en quadrature.

Dans le cas d'une incidence oblique, il n'y a plus d'ondes rigoureusement stationnaires car les ondes $\vec{C}_1$ et $\vec{C}_{-1}$ ne se propagent pas dans des directions exactement opposées et leurs amplitudes diffèrent légèrement, v_1 et v_{-1} étant distincts. Cependant, nous pouvons nous représenter l'état ondulatoire en imaginant un système d'ondes analogue au précédent, mais à nœuds non rigoureusement nuls, animé d'une propagation d'ensemble parallèle au plan d'incidence exprimée par le facteur $\exp(-i k \alpha_0 x)$.

Notons enfin que pour un réseau de très haute fréquence spatiale, les expressions (IV.15) s'écrivent, compte tenu des valeurs approchées (IV.11),

$$\begin{aligned}
 \vec{C}_1^r + \vec{C}_{-1}^r = & 2 K h \frac{n-1}{n^2 + 1} \cos \delta [(\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y) \cos (\mu x + \nu y) + \\
 & + \sin (\mu x + \nu y) \vec{u}_z] e^{-K z}, \\
 \vec{C}_1^t + \vec{C}_{-1}^t = & 2 K h \frac{n-1}{n^2 + 1} \cos \delta [(\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y) \cos (\mu x + \nu y) - \\
 & - \sin (\mu x + \nu y) \vec{u}_z] e^{K z},
 \end{aligned}$$

valeurs indépendantes de la longueur d'onde.

Le cas où $\delta = 90^\circ$ fera l'objet du chapitre suivant. Examinons maintenant le cas où les sillons du réseau sont parallèles au plan d'incidence, auquel nous avons

déjà consacré une étude spéciale [35]. Donc $\delta = 0$ et les approximations (IV.12) deviennent insuffisantes. Les champs réduits s'écrivent plus précisément

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}_s^r &= K h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \left(-s \frac{k}{K} \alpha_0 \vec{u}_x + \vec{u}_y + \mathbf{i} s \vec{u}_z \right), \\ \vec{\varepsilon}_s^t &= K h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 + 1} \left(-s \frac{k}{K} \alpha_0 \vec{u}_x + \vec{u}_y - \mathbf{i} s \vec{u}_z \right)\end{aligned}$$

à k^2/K^2 près, en valeur relative. La composante suivant Ox devient beaucoup plus petite que les autres. On a pratiquement des ondes circulaires dans un plan parallèle au plan yOz . D'autre part, d'après (IV.14), nous voyons que les rayons lumineux se propagent parallèlement à Oy , donc normalement aux sillons.

Les ondes diffractées dans un ordre supérieur p présentent une structure analogue avec une fréquence spatiale qui n'est plus celle du réseau mais p fois plus grande. Cependant leur amplitude s'atténue rapidement quand on s'éloigne du réseau, car elle comporte le facteur $\exp(-k v_p z)$.

2. *Champ magnétique incident normal au plan d'incidence.* — Pour une comparaison directe au précédent cas de polarisation, déterminons les champs électriques réduits définis par

$$(IV.16) \quad \vec{E}_s^r = E^i \vec{\eta}_s^r, \quad \vec{E}_s^t = E^i \vec{\eta}_s^t,$$

E^i étant compté positivement si $\vec{H}^i$ est disposé dans le sens Oy ; E^i est donc estimé suivant le vecteur unitaire $(-\gamma_0^r, 0, -\alpha_0)$. L'application de la relation de Maxwell (I.11), compte tenu des valeurs (II.17) des champs magnétiques, conduit à

$$(IV.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{sx}^r &= k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{(\beta_s^2 + v_s^r v_s^t) \gamma_0^t - \mathbf{i} n^2 \alpha_0 \alpha_s v_s^r}{n^2 v_s^r - v_s^t}, \\ \eta_{sy}^r &= -s v h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\gamma_0^t \alpha_s + \mathbf{i} n^2 \alpha_0 v_s^r}{n^2 v_s^r - v_s^t}, \\ \eta_{sz}^r &= -k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) n^2 \alpha_0 + \mathbf{i} \gamma_0^t \alpha_s v_s^t}{n^2 v_s^r - v_s^t}, \\ \eta_{sx}^t &= k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{(\beta_s^2 + v_s^r v_s^t) \gamma_0^t - \mathbf{i} \alpha_0 \alpha_s v_s^t}{n^2 v_s^r - v_s^t}, \\ \eta_{sy}^t &= -s v h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\gamma_0^t \alpha_s + \mathbf{i} \alpha_0 v_s^t}{n^2 v_s^r - v_s^t}, \\ \eta_{sz}^t &= -k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{(\alpha_s^2 + \beta_s^2) \alpha_0 + \mathbf{i} \gamma_0^t \alpha_s v_s^r}{n^2 v_s^r - v_s^t}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'un réseau à très haute fréquence spatiale, ces solutions s'écrivent, en introduisant les développements en série (IV.4),

$$\vec{\eta}_s^r = -K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^t \sin \delta + \mathbf{i} s n^2 \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r (\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y - \mathbf{i} s \vec{u}_z),$$

$$\gamma_s^t = -K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^t \sin \delta - i s \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r (\sin \delta \vec{u}_x - \cos \delta \vec{u}_y + i s \vec{u}_z).$$

En première approximation, l'amplitude de ces ondes est encore proportionnelle à la pente maximale du profil et dépend peu de la longueur d'onde. Leur champ électrique reste sensiblement dans un plan normal aux sillons du réseau et, ses composantes normale et parallèle à Oz étant égales et en quadrature, il est polarisé circulairement. Les ondes évanescentes jouissent donc de propriétés tout à fait analogues à celles que nous avons détaillées dans le précédent cas de polarisation.

Notons, pour conclure, que la théorie scalaire exposée au chapitre précédent ne s'applique absolument plus dans le cas présent.

V. Réseau à sillons normaux au plan d'incidence

1. **Mise en équations simplifiée.** — Le cas où le plan d'incidence est normal aux sillons du réseau présente un grand intérêt car il se trouve très sensiblement réalisé dans la pratique courante, dans toute utilisation classique des réseaux. Aussi lui consacrons-nous une étude spéciale. Bien que ce ne soit qu'un cas particulier et que les résultats précédents puissent s'y appliquer directement, il est intéressant de montrer comment la mise en équations se simplifie considérablement, rendant la résolution beaucoup plus facile.

La simplification provient du fait que les directions de diffraction restent dans le plan d'incidence (fig. 7) et que, le champ incident étant parallèle à la surface du réseau, les champs réfléchi, réfracté et diffractés le sont également par raison de symétrie. Le problème devient uniquement scalaire.

Le profil du réseau s'écrit maintenant $z = h \cos Kx$.

Remarquons que si l'incidence est normale, on peut toujours choisir l'axe Oy parallèle aux sillons, de sorte que ce cas s'intègre naturellement dans le présent chapitre.

Il suffit donc d'annuler v dans tous nos résultats précédents pour les adapter au cas présent. Ainsi $\beta_p = 0$ quel que soit l'ordre p , les α_p restent inchangés, $\alpha_p = \sin i + p (K/k)$,

$$(V.4) \quad \gamma_p^r = \sqrt{1 - \alpha_p^2}, \quad \gamma_p^t = -\sqrt{n^2 - \alpha_p^2}$$

si les ondes d'ordre p sont réelles,

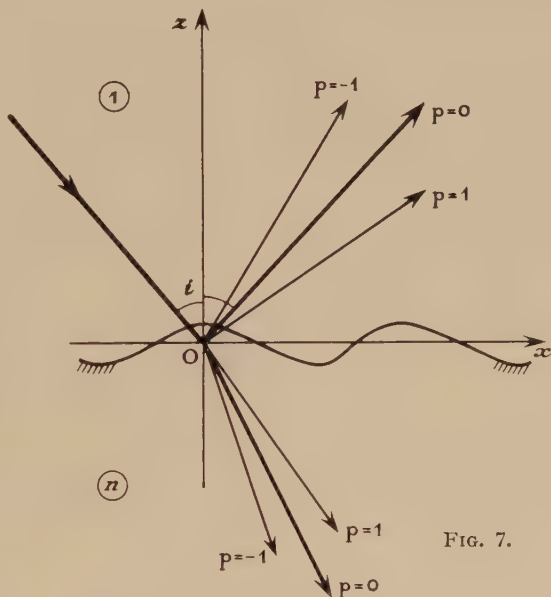


FIG. 7.

(V.2) $\gamma_p^r = -i v_p^r = -i \sqrt{\alpha_p^2 - 1}$, $\gamma_p^t = -i v_p^t = i \sqrt{\alpha_p^2 - n^2}$
 si les ondes correspondantes sont évanescentes.

Tous les champs sont parallèles à l'axe Oy . Il suffira, par conséquent, de noter leur ordre de diffraction p .

Des équations (I.19) à (I.26) ne subsistent que deux équations pour chaque cas de polarisation.

Lorsque le champ électrique incident est normal au plan d'incidence

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{\infty} E_p^t i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= E^i i^m J_m(k h \gamma_0^r), \\ (V.3) \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} E_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_{-m}}{\gamma_p^t} i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= \\ &= -E^i \frac{1 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^r} i^m J_m(k h \gamma_0^r). \end{aligned}$$

Nous indiquons par $\sum \dots^r$ une somme analogue à la précédente où H_p^t , γ_p^t et n doivent être remplacés par H_p^r , γ_p^r et 1.

Si c'est au contraire le champ magnétique incident qui se trouve orienté normalement au plan d'incidence,

$$\begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p^t i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= H^i i^m J_m(k h \gamma_0^r), \\ (V.4) \quad \frac{1}{n^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_{-m}}{\gamma_p^t} i^{-m-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= \\ &= -H^i \frac{1 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^r} i^m J_m(k h \gamma_0^r). \end{aligned}$$

Pour un réseau de faible amplitude, l'adoption des notations réduites mène à

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^t \tau_{0\perp} J_m(k h \gamma_0^t) - \varepsilon_0^r \dots + \sum_p \varepsilon_p^t i^{-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= \\ (V.5) \quad &= [(-1)^m + \rho_{0\perp}] J_m(k h \gamma_0^r) - \tau_{0\perp} J_m(k h \gamma_0^t), \\ \varepsilon_0^t \tau_{0\perp} \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^t} J_m(k h \gamma_0^t) - \varepsilon_0^r \dots + \sum_p \varepsilon_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_{-m}}{\gamma_p^t} i^{-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \\ - \sum \dots^r &= -\frac{(-1)^m - \rho_{0\perp}}{\gamma_0^r} (1 - \alpha_0 \alpha_{-m}) J_m(k h \gamma_0^r) - \frac{\tau_{0\perp}}{\gamma_0^t} (n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}) J_m(k h \gamma_0^t) \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \zeta_0^t \tau'_{0\parallel} J_m(k h \gamma_0^t) - \zeta_0^r \dots + \sum_p \zeta_p^t i^{-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \sum \dots^r &= \\ (V.6) \quad &= [(-1)^m + \rho'_{0\parallel}] J_m(k h \gamma_0^r) - \tau'_{0\parallel} J_m(k h \gamma_0^t), \\ \zeta_0^t \tau'_{0\parallel} \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{n^2 \gamma_0^t} J_m(k h \gamma_0^t) - \zeta_0^r \dots + \frac{1}{n^2} \sum_p \zeta_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_{-m}}{\gamma_p^t} i^{-p} J_{m+p}(k h \gamma_p^t) - \\ - \sum \dots^r &= -\frac{(-1)^m - \rho'_{0\parallel}}{\gamma_0^r} (1 - \alpha_0 \alpha_{-m}) J_m(k h \gamma_0^r) - \frac{\tau'_{0\parallel}}{n^2 \gamma_0^t} (n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}) J_m(k h \gamma_0^t), \end{aligned}$$

m étant un entier quelconque, p un entier différent de 0.

2. **Solution.** — Les solutions (II.10), (II.11), (II.12) et (II.17) s'appliquent immédiatement. Nous les complétons en donnant les champs diffractés du second ordre ζ_{2p}^r et ζ_{2p}^t que nous n'avons pas calculés au chapitre II par suite de l'excessive complexité.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0^r &= k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t \left[1 - \frac{1}{2 \gamma_0^t} \sum_{s=\pm 1} (\gamma_s^r + \gamma_s^t) \right], \\
 \varepsilon_0^t &= k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\gamma_0^r + \gamma_0^t} \sum_{s=\pm 1} (\gamma_s^r + \gamma_s^t) \right], \\
 (V.7) \quad \varepsilon_s^r &= \varepsilon_s^t = i k h \gamma_0^r \frac{\gamma_s^r + \gamma_s^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t}, \\
 \varepsilon_{2s}^r &= \frac{k^2 h^2}{4} \gamma_0^r \frac{\gamma_{2s}^r + \gamma_{2s}^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^t), \\
 \varepsilon_{2s}^t &= \frac{k^2 h^2}{4} \gamma_0^r \frac{\gamma_{2s}^r + \gamma_{2s}^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} (\gamma_0^t - 2 \gamma_s^r - 2 \gamma_s^t + \gamma_{2s}^r), \\
 \zeta_0^r &= k^2 h^2 \frac{n^2 \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left[1 - \sum_{s=\pm 1} \frac{2 n^2 \alpha_0 \gamma_0^t \alpha_s - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) (n^2 \alpha_0^2 \alpha_s^2 + \gamma_0^t \gamma_s^r \gamma_s^t)}{2 n^2 \gamma_0^t (\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)} \right], \\
 \zeta_0^t &= k^2 h^2 (n^2 - 1) \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left[1 - \sum_{s=\pm 1} \frac{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t) \alpha_0 \alpha_s - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) (\alpha_0^2 \alpha_s^2 + \gamma_0^r \gamma_0^t \gamma_s^r \gamma_s^t)}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t) (\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)} \right], \\
 (V.8) \quad \zeta_s^r &= -i k h \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha_s - \gamma_0^t \gamma_s^t}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 \zeta_s^t &= -i k h \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\alpha_0 \alpha_s - \gamma_0^t \gamma_s^r}{n^2 \gamma_s^r - \gamma_s^t}, \\
 \zeta_{2s}^r &= \frac{k^2 h^2}{2} \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[\frac{\gamma_0^t + \gamma_{2s}^t}{2} - \frac{n^2 \alpha_s (\alpha_0 \gamma_{2s}^t + \alpha_{2s} \gamma_0^t) - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) (\gamma_0^t \gamma_s^r \gamma_s^t \gamma_{2s}^t + n^2 \alpha_0 \alpha_s^2 \alpha_{2s})}{n^2 (\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t)} \right], \\
 \zeta_{2s}^t &= \frac{k^2 h^2}{4} \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma_{2s}^r - \gamma_{2s}^t} \left[\frac{\gamma_0^t + n^2 \gamma_{2s}^r}{2} - \frac{\alpha_s (n^2 \alpha_0 \gamma_{2s}^r + \alpha_{2s} \gamma_0^t) - (\gamma_s^r + \gamma_s^t) (\gamma_0^t \gamma_s^r \gamma_s^t \gamma_{2s}^r + \alpha_0 \alpha_s^2 \alpha_{2s})}{\alpha_s^2 - \gamma_s^r \gamma_s^t} \right].
 \end{aligned}$$

Ces expressions conviennent quel que soit le pas du réseau, que les ondes diffractées soient ordinaires ou évanescentes. Examinons en les conséquences.

3. Réseau de basse fréquence spatiale. — Les défauts des pouvoirs de réflexion et de transmission se déduisent de (III.15) :

$$(V.9) \quad \begin{aligned} \frac{R_{\perp} - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} &= -2 (k h \gamma_0^r)^2 \left(1 - \frac{K^2}{k^2} \frac{n^2 \gamma_0^{r3} + \gamma_0^{t3}}{\gamma_0^{r4} \gamma_0^{t3}} \right) + \frac{3}{2} (k h \gamma_0^r)^4 + \dots, \\ \frac{T_{\perp} - T_{0\perp}}{T_{0\perp}} &= -\frac{k^2 h^2}{3} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \left(1 - 2 \frac{K^2}{k^2} \frac{n^2 \gamma_0^{r3} + \gamma_0^{t3}}{\gamma_0^{r3} \gamma_0^{t3} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)} \right) + \\ &\quad + \frac{3}{2} \left(k h \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

Dans le second cas de polarisation, les expressions (III.16) restent valables loin de l'incidence brewsterienne. Lorsque celle-ci est réalisée il subsiste un champ magnétique résiduel, d'après (III.17),

$$H_{0B}^r = - \left(K h \frac{n^2 - 1}{4 n^3} \right)^2 [n^4 (n^2 - 1)^2 - 4 (2 n^2 + 1)],$$

proportionnel au carré de la pente maximale du profil sinusoïdal et indépendant de la longueur d'onde, à K^2/k^2 près.

Les champs diffractés admettent, si le pas du réseau est nettement plus grand que la longueur d'onde, les développements en série

$$(V.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon_s^r &= \epsilon_s^t = i k h \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \left(1 - s \frac{K}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} - \frac{K^2}{2 k^2} \frac{n^2 \gamma_0^{r3} + \gamma_0^{t3}}{\gamma_0^{r3} \gamma_0^{t3} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)} + \dots \right), \\ \epsilon_{2s}^r &= -\frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^{r2} \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - s \frac{K}{k} \alpha_0 \frac{2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^{r2} \gamma_0^t} + \dots \right), \\ \epsilon_{2s}^t &= -\frac{k^2 h^2}{4} \gamma_0^r \frac{(\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - 2 s \frac{K}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r + \gamma_0^t} + \dots \right), \\ \zeta_s^r &= i k h \gamma_0^r \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - s \frac{K}{k} \frac{n^2 \alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \alpha_0^2 - \gamma_0^{t2}} + \dots \right), \\ \zeta_s^t &= -i k h n^2 \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left(1 - s \frac{K}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r \gamma_0^t} \frac{1}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} + \dots \right), \\ \zeta_{2s}^r &= -\frac{k^2 h^2}{2} \gamma_0^{r2} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} + \dots, \\ \zeta_{2s}^t &= -\frac{k^2 h^2}{2} \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} + \dots \end{aligned} \right.$$

D'une manière générale, l'orientation particulière des sillons du réseau, que nous considérons maintenant, n'apporte guère de modifications dans les conclusions du chapitre III. Mis à part les phénomènes de dépolarisation qui ont disparu, rien n'est fondamentalement changé quant aux influences de la longueur d'onde, du pas du réseau, de l'amplitude du profil sinusoïdal et de l'incidence.

4. Réseau de haute fréquence spatiale. — 1. Réflexion et réfraction. — Il en va différemment si la fréquence spatiale du réseau est élevée [36]. Nous avons remarqué au chapitre IV que l'angle δ des sillons avec le plan d'incidence intervient dans presque tous les termes des solutions. Aussi de notables changements se manifestent-ils que nous mettrons en relief en considérant plus particulièrement un réseau à fréquence spatiale suffisamment grande pour pouvoir adopter les développements en série (IV.4) qui se réduisent à

$$(V.11) \quad \begin{aligned} v_p^r &= |p| \frac{K}{k} \left(1 + \frac{k}{p K} \alpha_0 - \frac{k^2}{2 p^2 K^2} + \dots \right), \\ v_p^t &= -|p| \frac{K}{k} \left(1 + \frac{k}{p K} \alpha_0 - \frac{k^2 n^2}{2 p^2 K^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Examinons les ondes réfléchie et réfractée. L'introduction des valeurs (V.11), compte tenu de (IV.2), dans les solutions générales (V.7) mène à

$$(V.12) \quad \begin{aligned} \varepsilon_0^r &= k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t \left(1 + i \frac{k}{K} \frac{n^2 - 1}{2 \gamma_0^t} + \dots \right), \\ \varepsilon_0^t &= k^2 h^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \left[1 - i \frac{k}{K} (\gamma_0^r - \gamma_0^t) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Les valeurs complexes trouvées montrent que les ondulations du dioptré provoquent des écarts simultanés d'amplitude et de phase. Mais ces derniers restent faibles :

$$\varphi_{0\perp}^r = -\frac{k^3 h^2}{2 K} (n^2 - 1) \gamma_0^r, \quad \varphi_{0\perp}^t = -\frac{k^3 h^2}{4 K} (n^2 - 1) (\gamma_0^r + \gamma_0^t).$$

L'effet principal réside dans les écarts d'amplitude, donc des pouvoirs de réflexion et de transmission :

$$(V.13) \quad \frac{R_\perp - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} = 2 k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t, \quad \frac{T_\perp - T_{0\perp}}{T_{0\perp}} = \frac{k^2 h^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2$$

à $p^4 h^4$ près. Il y a donc un défaut de pouvoir réflecteur maximal et égal à $k^2 h^2 n$ à l'incidence normale et s'annulant à l'incidence rasante, et un excès de pouvoir de transmission croissant dans le rapport de $(n-1)^2$ à $n^2 - 1$ quand l'angle d'incidence varie de 0 à 90°, tous deux proportionnels aux carrés du nombre d'ondes et de l'amplitude du profil sinusoïdal. Un fait remarquable est qu'ils ne dépendent pas de la fréquence spatiale du réseau et cela avec une excellente approximation : à $k^4 h^2 / K^2$ près, en valeur relative.

Si c'est le champ magnétique incident qui est normal au plan d'incidence,

$$(V.14) \quad \begin{aligned} \zeta_0^r &= -i k K h^2 \frac{\gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \alpha_0^2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{t2}) + i \frac{k}{K} n^2 \gamma_0^t \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right) + \dots \right], \\ \zeta_0^t &= i \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \left[\frac{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} - i \frac{k}{2 K} (n^2 + 1 - 4 \alpha_0^2) + \dots \right] \end{aligned}$$

et, contrairement au cas précédent, les ondulations du dioptre provoquent surtout des retards de phase

$$\varphi_{\text{oll}}^{\text{r}} = k K h^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{\text{t}2}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}2} - \alpha_0^2} \gamma_0^{\text{r}}, \quad \varphi_{\text{oll}}^{\text{t}} = \frac{k K h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^{\text{r}} + \gamma_0^{\text{t}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}}} (\gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}})$$

proportionnels au nombre d'ondes, à la fréquence spatiale du réseau et au carré de l'amplitude du profil, si l'incidence est très différente de l'incidence brewsterienne.

Dans la même hypothèse, les pouvoirs de réflexion et de transmission sont tels que

$$(V.15) \quad \begin{aligned} \frac{R_{\parallel} - R_{\text{oll}}}{R_{\text{oll}}} &= k^2 h^2 \frac{\gamma_0^{\text{r}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}2} - \alpha_0^2} \times \\ &\times \left[2 n^2 \gamma_0^{\text{t}} \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right) + K^2 h^2 \frac{(n^2 - 1)^3}{(n^2 + 1)^2} \frac{(n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{\text{t}2})^2}{n^4 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}2}} \gamma_0^{\text{r}} + \dots \right], \\ \frac{T_{\parallel} - T_{\text{oll}}}{T_{\text{oll}}} &= \frac{k^2 h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^{\text{r}} + \gamma_0^{\text{t}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}}} \times \\ &\times \left[n^2 + 1 - 4 \alpha_0^2 + \frac{K^2 h^2}{2} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{n^2 \gamma_0^{\text{r}} + \gamma_0^{\text{t}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}}} (\gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}})^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ces écarts relatifs sont encore à peu près proportionnels aux carrés du nombre d'ondes et de l'amplitude du profil, mais dépendent, beaucoup plus sensiblement que dans le premier cas de polarisation, du pas du réseau ou, plus exactement, de la pente maximale du profil, puisqu'apparaissent des termes secondaires en $K^2 h^2$. Le pouvoir réflecteur du réseau est extrêmement voisin de celui d'un dioptre plan pour l'incidence telle que $\alpha_0 = \sqrt{n^2 + 1}/2$. Mais si l'indice n est de l'ordre de 1,5, cette incidence est voisine de l'incidence brewsterienne et les approximations précédentes ne conviennent plus. Ecrivons le champ magnétique réfléchi proprement dit

$$H_0^{\text{r}} = \frac{H^{\text{i}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}}} \left\{ n^2 \gamma_0^{\text{r}} + \gamma_0^{\text{t}} - \mathbf{i} k K h^2 \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^{\text{r}}}{n^2 \gamma_0^{\text{r}} - \gamma_0^{\text{t}}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{\text{t}2}) + \mathbf{i} \frac{k}{K} n^2 \gamma_0^{\text{t}} \left(1 - \frac{4 \alpha_0^2}{n^2 + 1} \right) \right] + \dots \right\}$$

et, à l'incidence brewsterienne, le pouvoir réflecteur devient

$$R_{\text{B}} = \frac{k^2 K^2 h^4}{4} \frac{(n^2 - 1)^4}{(n^2 + 1)^3}.$$

D'autre part, le retard de phase à la réflexion est alors

$$\varphi_{\text{B}}^{\text{r}} = \frac{\pi}{2} - \frac{k}{K} \frac{n^2 \gamma_0^{\text{t}}}{n^2 - 1} \frac{n^2 + 1 - 4 \alpha_0^2}{n^2 \alpha_0^2 + \gamma_0^{\text{t}2}}$$

et ne subit pas de discontinuité lorsque varie l'angle d'incidence.

2. *Milieux absorbants.* — Si le réseau est tracé sur un milieu absorbant, l'indice n et γ_0^{t} prennent des valeurs complexes (I.31) et (I.32) de sorte que la solution (V.12) s'écrit

$$\varepsilon_0^{\text{r}} = k^2 h^2 \gamma_0^{\text{r}} \left[\gamma_0^{\text{r}} - \mathbf{i} \gamma_0^{\text{r}'} + \frac{k}{K} n' \varkappa + \mathbf{i} \frac{k}{2 K} (n'^2 - \varkappa^2 - 1) + \dots \right].$$

L'absorption se manifeste à la fois sur l'amplitude et sur la phase. Le défaut de pouvoir réflecteur

$$\frac{R_{\perp} - R_{0\perp}}{R_{0\perp}} = 2 k^2 h^2 \gamma_0^r \left(\gamma_0' + \frac{k}{K} n' \alpha + \dots \right)$$

se distingue donc de celui d'un réseau transparent, mais si l'absorption n'est ni sélective, ni trop forte, il reste proportionnel au carré du nombre d'ondes.

Par contre, dans le second cas de polarisation, lorsque le champ électrique incident est parallèle au plan d'incidence, il apparaît dans l'expression (V.14) de ζ_r^0 un terme réel en $k K h^2$ d'où il s'ensuit que le défaut relatif de pouvoir réflecteur devient simplement proportionnel au nombre d'ondes.

3. Ondes diffractées. — Si le champ électrique incident est normal au plan d'incidence, les ondes diffractées évanescentes appartiennent au type transverse électrique ; leur propagation s'effectue parallèlement à Ox et leur champ électrique est uniquement transversal puisqu'il est parallèle à Oy . Leur champ magnétique par contre, que l'on pourrait calculer grâce à la relation de Maxwell (I.10), est dans le plan d'incidence et admet une composante longitudinale, suivant Ox .

Les approximations (IV.12) du chapitre précédent se révèlent inadaptées au cas présent puisqu'elles donnent seulement, pour $\delta = 90^\circ$, une amplitude nulle aux champs diffractés du premier ordre. Aussi convient-il de chercher de nouveaux développements en série à partir de la solution (V.7) :

$$(V.16) \quad \varepsilon_s^r = \varepsilon_s^t = -\frac{k^2 h}{2 K} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left[1 - s \frac{k}{K} \alpha_0 + \frac{k^2}{K^2} \left(\frac{n^2 + 1}{4} + \alpha_0^2 \right) + \dots \right].$$

Les champs diffractés du premier ordre sont donc sensiblement proportionnels au carré du nombre d'ondes, à l'amplitude du profil sinusoïdal et inversement proportionnels à la fréquence spatiale du réseau.

Les champs diffractés dans le second ordre

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2s}^r &= -\frac{k^2 h^2}{8} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left[1 - i \frac{k}{2 K} \gamma_0^t + \frac{k^2}{K^2} \frac{7(n^2 - 1) + 4 i s \alpha_0 \gamma_0^t}{16} + \dots \right], \\ \varepsilon_{2s}^t &= \frac{k^2 h^2}{8} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left[1 + i \frac{k}{2 K} \gamma_0^t - \frac{k^2}{K^2} \frac{7(n^2 - 1) + 4 i s \alpha_0 \gamma_0^t}{16} + \dots \right] \end{aligned}$$

sont également proportionnels au carré du nombre d'ondes, mais proportionnels au carré de l'amplitude du profil et dépendent peu de la fréquence spatiale du réseau.

La généralisation apparaît facilement : l'amplitude des champs diffractés dans l'ordre p est proportionnelle à $k^2 K^{p-2} h^p$. Elle est, d'autre part, atténuée suivant le facteur $\exp(-k v_p z)$ ou, compte tenu de (V.11), $\exp(-|p| K z)$ pour un champ diffracté par réflexion, $\exp(|p| K z)$ pour un champ transmis. Donc, à quelque distance du réseau ne peuvent conserver une amplitude appréciable que les ondes diffractées dans les ordres peu élevés. Notons que le coefficient d'atténuation est sensiblement indépendant de la longueur d'onde.

Le flux moyen d'énergie transportée par chaque onde est indiqué par son vecteur de Poynting dont l'expression (IV.13) se simplifie en

$$\vec{P}_p = \frac{c E^{12}}{8 \pi} e^{-2k v_p z} |\varepsilon_p|^2 \alpha_p \vec{u}_x.$$

Donc, par exemple

$$\vec{p}_s = s \frac{c E^{i2}}{8 \pi} \frac{k^3 h^2}{4 K} \gamma_0^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \left(1 - s \frac{k}{K} \alpha_0 + \dots \right) \vec{u}_x.$$

Nous avons déjà remarqué au chapitre IV qu'à l'incidence normale s'établit un système d'ondes stationnaires de part et d'autre de la surface du réseau. Les champs diffractés totaux s'écrivent

$$C^r = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p^r e^{-pKz} \cos p K x, \quad C^t = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_p^t e^{pKz} \cos p K x$$

et présentent la même périodicité que le réseau.

Si, inversement, c'est le champ magnétique incident qui se trouve normal au plan d'incidence, les ondes diffractées appartiennent au type transverse magnétique. Les champs magnétiques réduits, parallèles à Oy s'écrivent, d'après (V.8),

$$\begin{aligned} \zeta_s^r &= -i k h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{s n^2 \alpha_0 - i \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \left(1 + 2 s \frac{k}{K} \alpha_0 + \dots \right), \\ \zeta_s^t &= -i k h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{s \alpha_0 + i \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \left(1 + 2 s \frac{k}{K} \alpha_0 + \dots \right), \end{aligned}$$

proportionnels par conséquent au nombre d'ondes et à l'amplitude du profil.

Les champs électriques se situent, par contre, dans le plan d'incidence et leur amplitude réduite, définie par (IV.16), est donnée par (IV.17) où il suffit d'annuler v et β_s . Sous forme approchée

$$\begin{aligned} \eta_{sx}^r &= i s \eta_{sz}^r = -K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^t + i s n^2 \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \left(1 + 3 s \frac{k}{K} \alpha_0 + \dots \right), \\ \eta_{sx}^t &= -i s \eta_{sz}^t = -K h \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \frac{\gamma_0^t - i s \alpha_0}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \gamma_0^r \left(1 + 3 s \frac{k}{K} \alpha_0 + \dots \right). \end{aligned} \quad (V.17)$$

Les ondes diffractées dans le premier ordre sont donc polarisées circulairement dans le plan d'incidence et d'amplitude proportionnelle à la pente maximale du profil, dépendant peu de la longueur d'onde. On remarque là une différence importante entre les deux cas principaux de polarisation.

5. Résolution par itération. — Nous avons remarqué, au chapitre II, que le système rigoureux d'équations (II.2) à (II.6) ou (II.14) peut être considérablement simplifié si l'on se contente d'une approximation à $k^2 h^2 \gamma_p^2$ près et nous avons mis ce fait à profit pour calculer les champs diffractés jusqu'au second ordre. Effectuons, sur les systèmes (V.5) et (V.6), une opération identique basée sur le principe suivant : pour une valeur donnée de l'indice m , les termes correspondant à $|p| > |m|$ et les termes en ε_0 ou ζ_0 n'apportent qu'une contribution négligeable et nous les supprimerons. Si nous écartons, momentanément, le cas $m = 0$ qui sert au calcul des champs réduits réfléchi et réfracté, le système d'équations prend la configuration

$$\begin{bmatrix} a_{11}^r & a_{11}^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{11}^r & b_{11}^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^r & a_{12}^t & a_{22}^r & a_{22}^t & 0 & 0 \\ b_{12}^r & b_{12}^t & b_{22}^r & b_{22}^t & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2^r \\ \varepsilon_2^t \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \\ \dots \end{bmatrix}.$$

La triangularisation, dont nous avons montré l'avantage au chapitre I, ne se trouve pas complètement réalisée, mais la matrice des coefficients est une matrice « à degrés » voisins de la diagonale principale. Dans l'application de la méthode des réduites il convient, bien entendu, de résoudre d'abord le système réduit à 2 équations, puis à 4, ..., 2 N équations. Le calcul, de proche en proche, des champs diffractés devient extrêmement simple puisque la détermination de chaque couple d'inconnues ε_p^r et ε_p^t exige seulement la résolution d'un système de deux équations linéaires. Il est même très facile d'exprimer littéralement chaque champ diffracté en fonction des champs diffractés d'ordre inférieur. C'est ce que nous allons entreprendre.

1. Champ électrique incident normal au plan d'incidence. — Supposons déterminés les champs diffractés jusqu'à l'ordre $q - 1$ si q est positif, $q + 1$ si q est négatif. Les champs d'ordre q seront donnés par les équations (V.5) où $m = -q$. Ecrivons-les en mettant les inconnues en évidence :

$$(V.18) \quad i^{-q} [\varepsilon_q^t J_0(k h \gamma_q^t) - \varepsilon_q^r J_0(k h \gamma_q^r)] = [(-1)^q + \rho_{01}] J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau_{01} J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \sum_{|p| < |q|} \varepsilon_p^t i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots,$$

$$(V.19) \quad i^{-q} [\varepsilon_q^t \gamma_q^t J_0(k h \gamma_q^t) - \varepsilon_q^r \gamma_q^r J_0(k h \gamma_q^r)] = - \frac{(-1)^q - \rho_{01}}{\gamma_0^r} (1 - \alpha_0 \alpha_q) J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau_{01} \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_0^t} J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \sum_{|p| < |q|} \varepsilon_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_q}{\gamma_p^t} i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots.$$

Ce système admet la solution

$$(V.20) \quad \begin{aligned} \varepsilon_q^r &= \frac{i^q \gamma_q^t}{(\gamma_q^r - \gamma_q^t) J_0(k h \gamma_q^r)} \left\{ \left[(-1)^q + \rho_{01} + \frac{(-1)^q - \rho_{01}}{\gamma_0^r} \frac{1 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_q^t} \right] \times \right. \\ &\quad \times J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau_{01} \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_0^t \gamma_q^t} \right) J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \\ &\quad \left. - \sum_{|p| < |q|} \varepsilon_p^t \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_q}{\gamma_p^t \gamma_q^t} \right) i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots \right\}, \\ \varepsilon_q^t &= \frac{i^q \gamma_q^r}{(\gamma_q^r - \gamma_q^t) J_0(k h \gamma_q^t)} \left\{ \left[(-1)^q + \rho_{01} + \frac{(-1)^q - \rho_{01}}{\gamma_0^r} \frac{1 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_q^r} \right] \times \right. \\ &\quad \times J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau_{01} \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_0^t \gamma_q^r} \right) J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \\ &\quad \left. - \sum_{|p| < |q|} \varepsilon_p^t \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_q}{\gamma_p^t \gamma_q^r} \right) i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots \right\}. \end{aligned}$$

Dans les sommes, l'indice p désigne un entier de même signe que q , qui prend donc les valeurs $1, 2, \dots, q - 1$ si q est positif, $-1, -2, \dots, q + 1$ si q est négatif.

2. *Champ magnétique incident normal au plan d'incidence.* — Quelques modifications d'écriture seulement permettent de répondre au problème posé par ce second cas de polarisation. Dans (V.18) il suffit de changer les ε en ζ et les $\rho_{0\perp}$, $\tau_{0\perp}$ en $\rho_{0\parallel}$ et $\tau_{0\parallel}$, mais dans (V.19) il faut remplacer ε^r et $\rho_{0\perp}$ par ζ^r et $\rho'_{0\parallel}$, ε^t et $\tau_{0\perp}$ par ζ^t/n^2 et $\tau'_{0\parallel}/n^2$. On voit aisément que

$$\zeta_q^r = \frac{i^q \gamma_q^t}{(n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t) J_0(k h \gamma_q^r)} \left\{ \left[(-1)^q + \rho'_{0\parallel} + n^2 \frac{(-1)^q - \rho_{0\parallel}}{\gamma_0^r} \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \frac{1 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_q^t} \right] J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau'_{0\parallel} \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_0^t \gamma_q^t} \right) J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \right. \\ \left. - \sum_{|p| < |q|} \zeta_p^t \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_p}{\gamma_p^t \gamma_q^t} \right) i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots \right\}, \quad (V.21)$$

$$\zeta_q^t = \frac{i^q n^2 \gamma_q^r}{(n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t) J_0(k h \gamma_q^t)} \left\{ \left[(-1)^q + \rho'_{0\parallel} + \frac{(-1)^q - \rho'_{0\parallel}}{\gamma_0^r} \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \frac{1 - \alpha_0 \alpha_q}{\gamma_q^r} \right] J_{-q}(k h \gamma_0^r) - \tau'_{0\parallel} \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_q}{n^2 \gamma_0^t \gamma_q^r} \right) J_{-q}(k h \gamma_0^t) - \right. \\ \left. - \sum_{|p| < |q|} \zeta_p^t \left(1 - \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_p}{n^2 \gamma_p^t \gamma_q^r} \right) i^{-p} J_{p-q}(k h \gamma_p^t) + \sum \dots \right\}.$$

Les expressions (V.20) et (V.21), malgré leur forme littérale quelque peu compliquée, permettent en fait, dans un cas concret, d'opérer un calcul numérique extrêmement rapide. Point n'est besoin d'un ordinateur électronique. Il est à la portée d'un calculateur moyen de trouver, en une heure, les champs diffractés jusqu'au dixième ordre si on le désire. Il suffit de dresser, au préalable, un tableau des valeurs numériques des coefficients α et γ , définis par (V.1) ou (V.2) et des différentes puissances de $k h/2$, γ_0^r , γ_0^t ; la suite du calcul ne comporte aucune difficulté.

En incidence normale de nouvelles simplifications interviennent puisque $\alpha_0 = 0$, $\gamma_0^r = 1$, $\gamma_0^t = -n$. D'autre part, les ondes diffractées symétriquement par rapport à la normale au réseau ont même amplitude par raison de symétrie, $\varepsilon_p = \varepsilon_{-p}$, $\zeta_p = \zeta_{-p}$ et le nombre d'inconnues se trouve réduit de moitié.

Remarquons que dans les solutions (V.20) et (V.21) nous n'avons pas développé en série les coefficients de Bessel. Si nous les avons développés auparavant, c'était pour obtenir des solutions littérales et dégager l'influence des divers facteurs. Mais pour un calcul purement numérique, il est bien préférable de relever leur valeur sur des tables. On y gagne en rapidité et en précision.

Notons enfin que, connaissant les valeurs approchées des champs réduits jusqu'au q^{me} ordre, il est possible de calculer, de proche en proche, de meilleures approximations des champs d'ordre $q - 1$, puis $q - 2, \dots, 0$, si q est positif, $q + 1, q + 2, \dots, 0$ si q est négatif.

VI. Etude expérimentale

Pour soumettre nos résultats à l'épreuve de l'expérience, la difficulté majeure a résidé dans la fabrication d'un réseau diélectrique à profil sinusoïdal. L'impossibilité de la réaliser à l'échelle des longueurs d'onde optiques nous a conduit à opérer dans le domaine des ondes centimétriques de la bande des 3 cm. Les réseaux ont pu alors être confectionnés en paraffine tantôt par moulage, tantôt par traçage, comme nous le préciserons ultérieurement.

Nous nous attacherons essentiellement ici à relater nos résultats relatifs à la répartition de l'énergie dans les différents ordres dans le cas où les sillons du réseau sont normaux au plan d'incidence. Nous avons bien effectué quelques expériences dans des cas plus généraux. Mais du fait que les faisceaux diffractés quittent le plan d'incidence, des difficultés d'ordre mécanique surgissent et le repérage des angles, à l'échelle qu'imposent les ondes centimétriques, devient très imprécis. Nous avons seulement observé qualitativement les effets de dépolarisation prévus aux chapitres III et IV, sans pouvoir les mesurer de manière satisfaisante étant donné leur faible importance lorsque nos hypothèses ont été respectées.

La figure 8 montre l'ensemble du montage. Il s'agit essentiellement d'un goniomètre où le générateur, un klystron 2K25 relié à un atténuateur étalonné et à un ondemètre, rayonne par un cornet placé au foyer d'une lentille de paraffine. Le récepteur est un cristal IN23 placé au foyer d'un réflecteur parabolique assez large pour recueillir la totalité du faisceau diffracté dans une direction donnée par l'échantillon placé sur la plate-forme. Des écrans (retirés pour la clarté de la photographie) isolaient le récepteur du rayonnement latéral du cornet émetteur et des réflexions parasites sur la support de la lentille de paraffine.

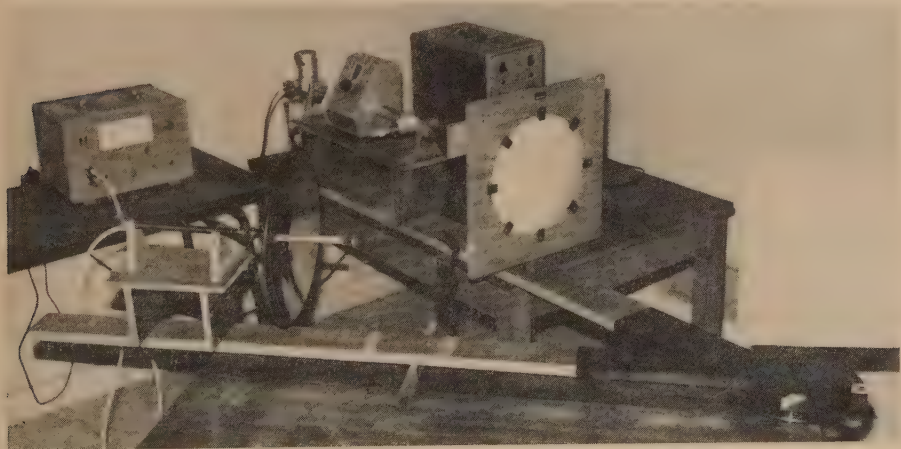


FIG. 8.

1. Réseau de basse fréquence spatiale. — 1. Répartition de l'énergie. — Nous avons cherché la répartition de l'énergie entre les différentes ondes diffractées par

un réseau de basse fréquence spatiale d'intervalle fondamental 88,5 mm et d'amplitude $h = 2,5$ mm. Il fut d'abord réalisé en feuille d'aluminium, puis en paraffine par moulage. Le tableau I donne, le champ électrique étant normal au plan d'incidence et le klystron accordé sur la fréquence de 9 320 MHz, d'une part les valeurs mesurées des intensités diffractées par réflexion, d'autre part les valeurs calculées grâce aux expressions (V.20) et (V.7) pour l'intensité réfléchie. L'angle d'incidence $i = 12^\circ$ a été choisi de manière à obtenir le plus grand nombre possible d'ondes diffractées de l'ordre -3 à l'ordre 2. L'unité est l'intensité incidente.

TABLEAU I. — *Intensité diffractée*

Ordre	— 3	— 2	— 1	0	1	2
Mesure	$\simeq 10^{-5}$	0,003 0	0,010 7	0,030 0	0,011 0	0,001 15
Calcul	$17,6 \times 10^{-6}$	0,002 86	0,012 0	0,025 6	0,012 2	0,001 00

Que conclure de ces mesures ? L'accord avec la théorie est réalisé à 15 % près (dans l'ordre -3 , nous n'avons pu que constater l'ordre de grandeur). Le plus gros écart porte sur l'intensité réfléchie nettement supérieure à la valeur calculée à partir de la formule (V.7) de ε_0^r . A vrai dire, nous étions sans illusion sur les chances de vérifier convenablement cette formule car le réseau employé ne respecte que très grossièrement les hypothèses nécessaires à sa validité. En effet, son amplitude, choisie assez grande pour rendre mesurables les intensités diffractées, est telle que $kh = 0,488$, pas très petit par rapport à 1. Le terme en $(kh)^4$ joue certainement un rôle non négligeable. Essayons d'en tenir compte. Nous ne l'avons pas calculé exactement dans notre théorie électromagnétique, mais la théorie scalaire, ainsi que nous l'avons vu au chapitre III, en donne une valeur approchée. L'application du développement (III.13) indique, pour ce terme,

$$E_0^r = E^i \rho_{01} \left[\dots + \frac{1}{4} (kh \gamma_0^r)^4 + \dots \right].$$

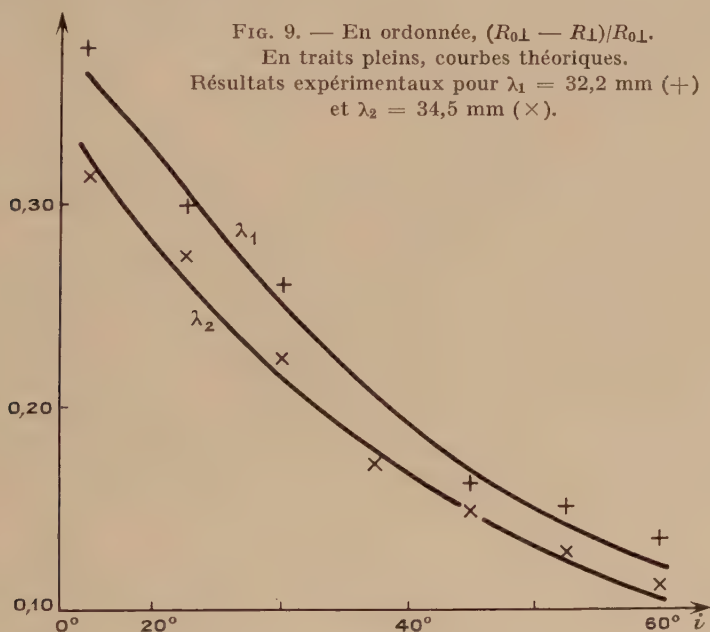
En combinant cela avec l'expression (V.7), nous avons

$$(VI.1) \quad E_0^r = E^i \rho_{01} \left[1 + k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t \left(1 - \sum_{s=\pm 1} \frac{\gamma_s^r + \gamma_s^t}{2 \gamma_0^t} \right) + \frac{(kh \gamma_0^r)^4}{4} \right],$$

expression qui mène à la valeur numérique $I_0^r = 0,027 1$ qui, elle, ne se trouve plus qu'à 10 % de la valeur expérimentale. Au total, sur l'ensemble des intensités réfléchie et diffractées, l'écart relatif entre les mesures et les prévisions théoriques n'excède pas 15 %. De multiples causes provoquent certainement cet écart ; nous avons déjà dit que le réseau utilisé ne remplit pas très favorablement les hypothèses de base. D'autre part, le moule qui a servi à sa confection, fabriqué au laboratoire avec des moyens de fortune, ne réalise qu'approximativement un profil sinusoïdal. Enfin les difficultés pour obtenir, en ondes centimétriques, des faisceaux bien homogènes sont bien connues. L'incertitude de ces mesures est donc grande et d'estimation pratiquement impossible. Aussi considérons-nous comme satisfaisant, plus même que nous l'espérons, l'accord entre théorie et expérience.

2. *Pouvoir réflecteur.* — Avec le même réseau en paraffine, nous avons cherché l'influence de la longueur d'onde et de l'angle d'incidence sur le pouvoir réflecteur. Les mesures exigeant une expérience de longue durée, il a fallu contrôler l'émission du klystron. A cet effet, un coupleur directif a été branché sur la ligne émettrice et relié à un cristal détecteur à large bande IN26. L'atténuateur variable, placé à la sortie du klystron, a permis d'en maintenir constant le niveau de sortie.

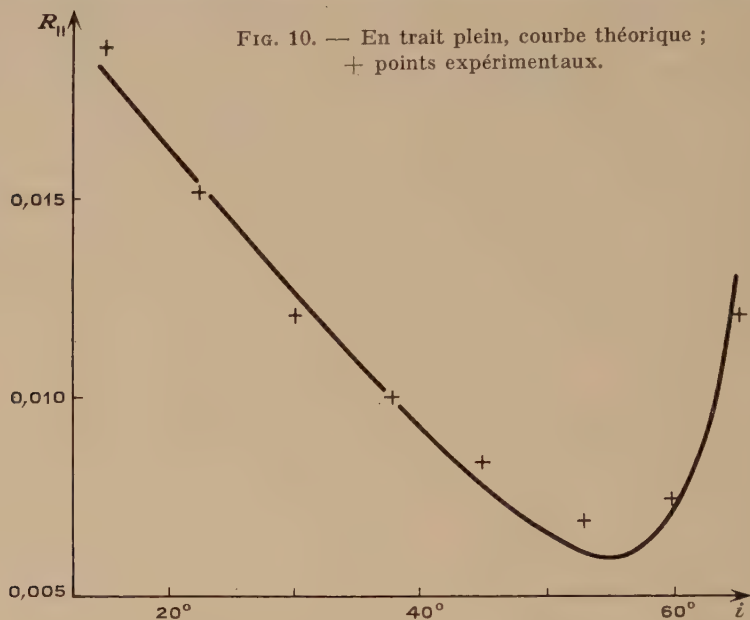
La figure 9 indique les variations, en fonction de l'angle d'incidence i et pour les deux longueurs d'onde $\lambda_1 = 32,2$ mm, $\lambda_2 = 34,5$ mm, du défaut relatif du pouvoir réflecteur $(R_{0\perp} - R_{\perp})/R_{0\perp}$. Les valeurs expérimentales sont pointées, les courbes représentent les valeurs théoriques calculées à partir de (VI.4). Les discordances observées semblent bien purement aléatoires. Notons que le réseau utilisé ne réalise pas, dans cette expérience, un réseau à basse fréquence spatiale au sens où nous l'avons entendu au chapitre III. En effet, pour une incidence supérieure à 40° environ, l'onde diffractée par réflexion dans l'ordre 1 est évanescente. Mais ni théoriquement, ni expérimentalement ne se manifeste une discontinuité lorsque l'on franchit cette incidence.



Sur la figure 10, calculs et expérience montrent que le pouvoir réflecteur, lorsque le champ électrique incident est parallèle au plan d'incidence, ne s'annule pas à l'incidence brewsterienne.

En conclusion, nous voyons donc que le réseau utilisé, de caractéristiques pourtant peu favorables a priori, a permis une vérification convenable de nos calculs. Les hypothèses sur lesquelles nous nous sommes basé ne paraissent donc pas excessivement restrictives. Cela laisse penser que pour un réseau d'amplitude quelconque à profil sinusoïdal, la méthode des réduites s'applique sans difficulté et que la convergence doit être assez rapide.

2. **Réseau de haute fréquence spatiale.** — La fabrication d'un tel réseau a été opérée en deux étapes. Un racloir, en lame d'acier, a été profilé sinusoidalement avec un pas de 12 mm et une amplitude de 2 mm. Il constitua ensuite l'outil d'une sorte de rabot. Son orientation, variable et repérable sur un cercle gradué, par rapport à la table du rabot a permis de fabriquer, en paraffine, divers réseaux de



même pas, mais d'amplitudes différentes. Cette technique a été préférée à celle du moulage car il était plus simple de fabriquer un seul racloir que plusieurs tôles ondulées. D'autre part, comme nous nous proposons d'étudier tout particulièrement l'influence de l'amplitude du profil sinusoidal, il fallait pouvoir connaître assez exactement les amplitudes des divers réseaux comparés, sinon en valeurs absolues, du moins en valeurs relatives, ce qui fut facile grâce au repérage de l'orientation du racloir.

1. *Ondes évanescentes.* — L'existence des ondes évanescentes ne fait plus de doute pour personne, tout particulièrement depuis les expériences de M. Schaeffer & G. Toraldo di Francia [27]. Avec un réseau métallique, G. W. Stroke les a également mises en évidence et a montré qu'en incidence normale elles donnent lieu à un champ stationnaire au voisinage de la surface ([15] p. 378). Nous n'avons pu que répéter son expérience avec nos réseaux diélectriques et constater également l'existence d'un champ stationnaire de même périodicité que le réseau. Mais le taux d'ondes stationnaires est très petit et n'a pu être mesuré de manière assez précise pour en déduire l'amplitude des ondes évanescentes, trop faible par rapport à celle de l'onde incidente.

2. *Pouvoir réflecteur.* — Nous nous sommes donc surtout intéressé au pouvoir réflecteur et nous avons tenté la vérification de la loi (V.13) :

$$(VI.2) \quad (R_{\perp} - R_{0\perp})/R_{0\perp} = 2 k^2 h^2 \gamma_0^r \gamma_0^t.$$

Les tableaux II et III donnent les résultats de mesures effectuées à l'incidence constante $i = 15^\circ$, pour diverses longueurs d'onde avec le réseau d'amplitude $h = 1$ mm et pour divers réseaux avec $k = 0,195$ mm $^{-1}$.

TABLEAU II

k (mm $^{-1}$)	0,182 0	0,184 3	0,187 2	0,190 6	0,192 4	0,195 1
$\frac{R_0 - R}{R_0} \frac{1}{k^2}$ (mm 2)	4,15	4,30	4,00	3,75	3,85	3,90

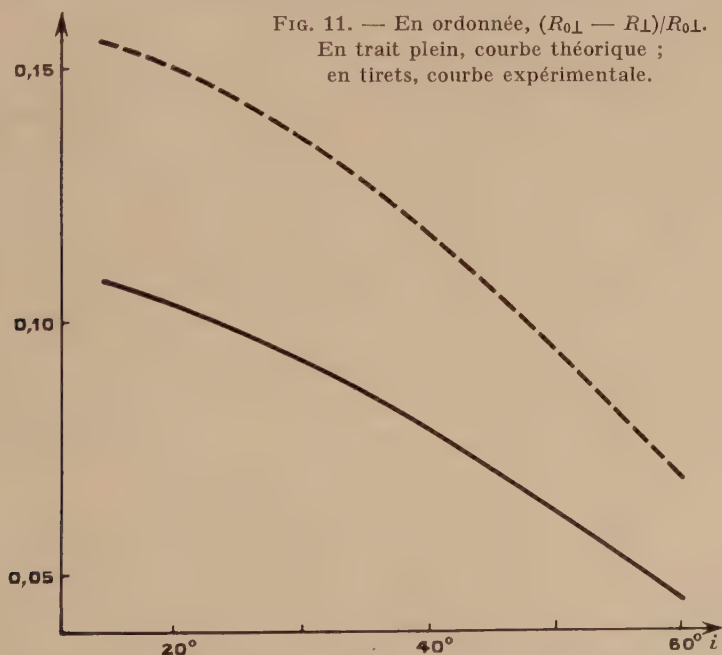
Les proportionnalités de $(R_{0\perp} - R_{\perp})/R_{0\perp}$ à k^2 et à h^2 se vérifient donc sensiblement. Par contre, la vérification absolue de la formule (VI.2) est loin d'être satisfaisante. D'après cette formule en effet, nous aurions dû trouver

$$\frac{R_0 - R}{R_0} \frac{1}{k^2} = 2,84 \text{ mm}^2 \quad \text{et} \quad \frac{R_0 - R}{R_0} \frac{1}{h^2} = 0,108 \text{ mm}^{-2},$$

considérablement inférieures aux valeurs expérimentales moyennes. Le même phénomène se reproduit à toutes les incidences comme le montre la figure 11, obtenue

TABLEAU III

h (mm)	1	0,87	0,71
$\frac{R_0 - R}{R} \frac{1}{h^2}$ (mm $^{-2}$)	0,155	0,15	0,14



avec le réseau d'amplitude $h = 1$ mm et $k = 0,1820$ mm $^{-1}$, avec même, semble-t-il, une aggravation relative pour les incidences élevées. Ayant répété plusieurs fois

ces expériences l'hypothèse d'une erreur fortuite ne saurait être retenue. Bien entendu, la principale cause d'erreur systématique provient d'une mesure imprécise de l'amplitude h du profil sinusoïdal du raclor. Nous avons cherché dans ce sens là, mais à cette cause n'est imputable tout au plus que 10 % d'écart, tout à fait insuffisant pour justifier nos résultats.

Il semble donc bien que cette discordance soit réelle et procède d'une cause fondamentale. L'origine, à notre avis, peut être cherchée dans le rayonnement des ondes évanescences. Nous avons considéré, dans tous nos calculs, une onde incidente plane illimitée reçue par un réseau également illimité. Dans ces conditions les ondes évanescences restent au voisinage de la surface du réseau. En réalité, nous expérimentons avec des faisceaux et des réseaux limités, de dimensions pas très grandes par rapport à la longueur d'onde. Par conséquent, les ondes évanescences, quittant le contact avec l'onde incidente, ne peuvent se maintenir dans le même état et rayonnent très certainement. Effectivement, nous avons pu constater expérimentalement, comme G. W. Stroke, ce rayonnement qui correspond à une fuite d'énergie électromagnétique, donc à une baisse du pouvoir réflecteur plus importante que celle que nous avons calculée. Toute une étude serait à faire concernant le rayonnement des ondes évanescences et nous nous proposons de nous y consacrer dans un proche avenir.

DEUXIÈME PARTIE

RÉSEAU DE PROFIL QUELCONQUE

VII. Répartition de l'énergie électromagnétique

1. Formulation du problème. — Nous nous proposons d'étudier la diffraction par un réseau de profil quelconque et dont les sillons ont une orientation quelconque par rapport au plan d'incidence zOx . Sa surface est donc représentée par

$$(VII.1) \quad z = f(x, y),$$

f étant une fonction périodique de x et de y de fréquences fondamentales $\mu/2\pi$ et $\nu/2\pi$. Nous supposons qu'elle admet partout des dérivées partielles f'_x et f'_y . Mathématiquement, nous introduisons là une restriction qui exclut par exemple les réseaux supposés à profil triangulaire. Mais physiquement, cette condition est toujours réalisée. Même les réseaux échelettes présentent une courbure finie sur leurs arêtes.

La normale au réseau est donc partout définie. Son vecteur unitaire s'écrit

$$(VII.2) \quad \vec{n} = \frac{-f'_x(x, y) \vec{u}_x - f'_y(x, y) \vec{u}_y + \vec{u}_z}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}}.$$

Au chapitre I, nous avons employé la méthode des développements en séries de Fourier, profitant du fait que les coefficients de ces séries se trouvaient avoir une forme analytique simple et s'extrayaient aisément des tables de fonctions de Bessel. Si la fonction $f(x, y)$ décrivant la surface du réseau n'est pas une fonction analytique très simple, cette méthode risque d'être plus compliquée. Pour une résolution numérique du problème, le procédé d'orthogonalisation de Schmidt

semble plus adapté. Mais, restant attaché à la recherche de solutions littérales chaque fois que possible et tout particulièrement dans le cas d'un réseau de faible amplitude, nous n'utiliserons pas ici ce procédé pour l'application duquel on se reportera aux travaux de R. Petit [8, 37] qui l'a utilisé avec profit. Nous suivrons donc la même méthode qu'au chapitre I.

La représentation (I.2) des champs par des spectres d'ondes planes reste valable, la démonstration que nous en avons donnée ne reposant que sur la périodicité de la surface diffractante et les coefficients α_p , β_p , γ_p^r et γ_p^t gardent leur valeur (I.6) et (I.7). Il s'ensuit que les relations (I.12) et (I.13) entre les composantes des champs subsistent, inchangées.

Exprimons ensuite les conditions aux limites (I.14) et (I.15) sur la surface du réseau. Lorsque nous y portons la valeur (VII.1) de z , nous trouvons deux sortes de quantités : $\exp[i a f(x, y)]$ et $f'_x \exp[i a f(x, y)]$ ou $f'_y \exp[i a f(x, y)]$, fonctions périodiques de x et y que nous développons en séries de Fourier

$$(VII.3) \quad \begin{aligned} \exp[i k \gamma_0^r f(x, y)] &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^i \exp[i q (\mu x + \nu y)], \\ \exp[-i k \gamma_p f(x, y)] &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{p,q} \exp[i q (\mu x + \nu y)]. \end{aligned}$$

Nous avons supposé $f(x, y)$ dérivable, ces exponentielles le sont donc également. D'où, par exemple

$$f'_x(x, y) \exp[i k \gamma_0^r f(x, y)] = \frac{\mu}{k \gamma_0^r} \sum_{q=-\infty}^{\infty} q A_q^i \exp[i q (\mu x + \nu y)].$$

Si l'on compare ces développements généraux à ceux que l'on obtient pour $f(x, y) = h \cos(\mu x + \nu y)$, on voit que les A_q^i et $A_{p,q}$ se substituent simplement aux coefficients de Bessel $i^q J_q(k h \gamma_0^r)$ et $i^{-q} J_q(k h \gamma_p)$. Le système d'équations se déduit donc aisément de (I.19) à (I.22) ou de (I.23) à (I.26).

1. Champ électrique normal au plan d'incidence. —

$$(VII.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(-E_{py}^r + E_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots &= E^i A_m^i, \\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(E_{px}^r - E_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots &= 0, \\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[-E_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + E_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + \right. \\ &\quad \left. + E_{pz}^r \alpha_p \right] A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots = E^i m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} A_m^i, \\ \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[E_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - E_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + E_{pz}^r \beta_p \right] A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots = -E^i \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) A_m^i. \end{aligned} \right.$$

2. *Champ magnétique normal au plan d'incidence.* — Il suffit de remplacer les E des équations (VII.4) par les H correspondants sauf, dans les deux dernières

équations où les E^t doivent être changés en H^t/n^2 . Nous n'écrirons donc pas ce système.

En conclusion, il apparaît donc que la formulation générale du problème est très analogue à celle relative au réseau de profil sinusoïdal, sur le plan formel du moins. Mais les coefficients A des développements (VII.4) en séries de Fourier risquent d'être plus compliqués que les coefficients de Bessel. Si la fonction $f(x, y)$ décrivant la surface du réseau n'est pas très simple, leur expression analytique peut se révéler inextricable ou incalculable. Cependant, pour un calcul numérique, il n'y a pas là de difficulté majeure. Un ordinateur permettrait une estimation rapide d'un grand nombre de ces coefficients.

2. Réseau de faible amplitude. — 1. Décompositions en séries de Fourier. — Représentons l'équation de la surface du réseau par son spectre de Fourier

$$(VII.5) \quad f(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \cos [p (\mu x + \nu y) - \psi_p]$$

en supposant que, par un choix convenable du plan xOy , $h_0 = 0$. Les quantités (VII.3) sont de la forme

$$\exp[-i k \gamma f(x, y)] = \prod_{p=1}^{\infty} \exp \{ -i k \gamma h_p \cos [p (\mu x + \nu y) - \psi_p] \}$$

ou

$$(VII.6) \quad \exp[-i k \gamma f(x, y)] = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{-n} J_n(k \gamma h_p) \exp \{ i^n [p (\mu x + \nu y) - \psi_p] \},$$

$\prod_{p=1}^{\infty}$ désignant le produit des différents $\sum_n$ correspondant à diverses valeurs de l'indice p . On voit que l'identification des coefficients A_q de (VII.3) n'est pas simple ; il faut grouper tous les termes tels que $\sum n p = q$.

Mais si l'amplitude $f(x, y)$ du réseau reste bornée à une valeur assez faible par rapport à la longueur d'onde pour que les arguments des fonctions de Bessel figurant dans (VII.6) soient petits, seules les faibles valeurs de n apporteront une contribution appréciable. Pour rester dans les mêmes conditions d'approximation que celles que nous avons toujours choisies jusqu'ici, nous ne considérerons que les valeurs $n = 0$ ou s ($s = \pm 1$). L'harmonique de rang q s s'obtiendra donc pour $p = q$ et $n = s$ dans l'une des sommes et $n = 0$ pour toute autre valeur de p . De plus, nous écrivons

$$J_0(k \gamma h_q) \simeq 1 - \frac{1}{4} k^2 \gamma^2 h_q^2$$

et les produits

$$\prod_{q=1}^{\infty} J_0(k \gamma h_q) \simeq 1 - \frac{k^2 \gamma^2}{4} \sum_{q=1}^{\infty} h_q^2,$$

c'est-à-dire

$$\prod_{q=1}^{\infty} J_0(k \gamma h_q) \simeq 1 - \frac{k^2 \gamma^2}{2} \overline{z^2},$$

en désignant par $\overline{z^2}$ le carré moyen de l'amplitude du réseau. Par conséquent

$$\exp[-i k \gamma f(x, y)] \simeq 1 - \frac{k^2 \gamma^2}{2} \bar{z}^2 - \sum_{\substack{q=-\infty \\ \neq 0}}^{\infty} i J_1(k \gamma h_q) \exp \left[i q \left(\mu x + \nu y - \frac{\psi_q}{|q|} \right) \right].$$

De la même manière, on établirait que

$$\exp[i k \gamma_0^r f(x, y)] \simeq 1 - \frac{k^2 \gamma_0^r{}^2}{2} \bar{z}^2 + \sum_{\substack{q=-\infty \\ \neq 0}}^{\infty} i J_1(k \gamma_0^r h_q) \exp \left[i q \left(\mu x + \nu y - \frac{\psi_q}{|q|} \right) \right]$$

(nous devrions en toute rigueur écrire $h_{|q|}$ et $\psi_{|q|}$, mais aucune confusion n'est possible). D'où l'identification

$$(VII.7) \quad \begin{aligned} A_0^i &= 1 - \frac{k^2 \gamma_0^r{}^2}{2} \bar{z}^2, & A_q^i &= i J_1(k \gamma_0^r h_q) \exp \left(-i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \\ A_{p0} &= 1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2} \bar{z}^2, & A_{pq} &= -i J_1(k \gamma_p h_q) \exp \left(-i \frac{q}{|q|} \psi_p \right). \end{aligned}$$

Remarquons que nous pouvons aussi adopter le développement limité

$$\exp[-i k \gamma f(x, y)] = 1 - \frac{1}{2} k^2 \gamma^2 \bar{z}^2 - i k \gamma f(x, y)$$

où nous ne conservons que la valeur moyenne du terme du second degré. Et, compte tenu de (VII.5),

$$(VII.8) \quad \begin{aligned} A_0^i &= 1 - \frac{k^2 \gamma_0^r{}^2}{2} \bar{z}^2, & A_q^i &= i \frac{k \gamma_0^r}{2} h_q \exp \left(-i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \\ A_{p0} &= 1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2} \bar{z}^2, & A_{pq} &= -i \frac{k \gamma_p}{2} h_q \exp \left(-i \frac{q}{|q|} \psi_p \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire des valeurs qui représentent les parties principales des expressions (VII.7).

Nous remarquons que les A_0 sont de l'ordre de 1 tandis que les A_q sont petits. Nous retrouvons la même disparité entre ces coefficients qu'entre les $J_0(k h \gamma)$ et les $J_q(k h \gamma)$.

2. *Système d'équations en notations réduites.* — En adoptant encore les notations réduites (II.1), le système (VII.4) prend une forme analogue à celle des équations (II.2) à (II.6) où les A_q se substituent aux $i^q J_q$ correspondants :

$$(VII.9) \quad \left[\begin{aligned} &\rho_{0\perp} \left(-\varepsilon_{0\perp}^r + \varepsilon_{0\parallel}^r m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) A_{0m}^r - \tau_{0\perp} \dots + \\ &\quad + \sum_p \left(-\varepsilon_{p\gamma}^r + \varepsilon_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\nu}{k} \right) A_{p,m+p}^r - \\ &\quad - \sum_{\dots}^t = A_m^i + A_{0m}^r \rho_{0\perp} - A_{0m}^t \tau_{0\perp}, \\ &- \rho_{0\perp} \varepsilon_{0\parallel}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) A_{0m}^r + \tau_{0\perp} \dots + \\ &\quad + \sum_p \left(\varepsilon_{px}^r - \varepsilon_{pz}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{\mu}{k} \right) A_{p,m+p}^r - \sum_{\dots}^t = 0, \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \text{(VII.9)} \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \rho_{01} \left(\varepsilon_{01}^r m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} + \varepsilon_{01}^r n \right) A_{0m}^r - \tau_{01} \left(\varepsilon_{01}^t m \frac{\nu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^t} + \varepsilon_{01}^t n \right) + \\
 & + \sum_p \left[-\varepsilon_{px}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\nu}{k} \right) + \varepsilon_{py}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\nu}{k} + \right. \\
 & + \left. \varepsilon_{pz}^r \alpha_p \right] A_{p,m+p}^r - \sum \dots = m \frac{\nu}{k} \alpha_0 \left(\frac{A_m^i - A_{0m}^r \rho_{01}}{\gamma_0^r} + A_{0m}^t \frac{\tau_{01}}{\gamma_0^t} \right), \\
 & - \rho_{01} \varepsilon_{01}^r \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) A_{0m}^r + \tau_{01} \dots + \sum_p \left[\varepsilon_{px}^r \frac{m+p}{\gamma_p^r} \beta_p \frac{\mu}{k} - \right. \\
 & - \left. \varepsilon_{py}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \alpha_p \frac{\mu}{k} \right) + \varepsilon_{pz}^r \beta_p \right] A_{p,m+p}^r - \sum \dots = \\
 & = - \left(\gamma_0^r + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right) (A_m^i - A_{0m}^r \rho_{01}) - \left(\gamma_0^t + m \frac{\mu}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^t} \right) \tau_{01} A_{0m}^t, \\
 & \left. \varepsilon_{px} \alpha_p + \varepsilon_{py} \beta_p + \varepsilon_{pz} \gamma_p = 0, \right.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

m étant un entier quelconque positif, négatif ou nul, p un entier non nul et la dernière équation étant applicable aux ε^r et ε^t .

Dans ce système d'équations, l'importance relative des différents termes n'apparaît pas d'une manière évidente à priori. Dans le cas du réseau à profil sinusoïdal, nous tirions argument de la régularité de cette forme pour présumer que l'amplitude des ondes diffractées décroissait quand augmentait leur ordre, ce qui nous permettait de simplifier considérablement le système d'équations. Nous ne saurions être aussi affirmatif pour un profil quelconque.

3. Harmoniques d'amplitude lentement décroissante. — Afin de chercher un critère de jugement, simplifions le problème en supposant que les amplitudes des harmoniques de $f(x, y)$ forment une suite lentement décroissante. Dans ces conditions, nous pouvons, selon toute vraisemblance, baser une résolution approchée sur les mêmes principes qu'au chapitre II : les champs diffractés d'ordre q sont déterminés par les équations (VII.9) où $m = -q$; les termes en $\varepsilon_p A_{p,p-q}$ sont négligeables si $p \neq q$. D'où, en assimilant $A_{q,0}$ à 1,

$$\begin{aligned}
 \text{(VII.10)} \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & -\varepsilon_{qy}^r + \varepsilon_{qy}^t = 0, \\
 & \varepsilon_{qx}^r - \varepsilon_{qx}^t = 0, \\
 & -\varepsilon_{qx}^r \gamma_q^r + \varepsilon_{qx}^t \gamma_q^t + \varepsilon_{qz}^r \alpha_q - \varepsilon_{qz}^t \alpha_q = 0, \\
 & -\varepsilon_{qy}^r \gamma_q^r + \varepsilon_{qy}^t \gamma_q^t + \varepsilon_{qz}^r \beta_q - \varepsilon_{qz}^t \beta_q = \\
 & = -i k \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) h_q \exp \left(i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \\
 & \varepsilon_{qx}^r \alpha_q + \varepsilon_{qy}^r \beta_q + \varepsilon_{qz}^r \gamma_q^r = 0, \\
 & \varepsilon_{qx}^t \alpha_q + \varepsilon_{qy}^t \beta_q + \varepsilon_{qz}^t \gamma_q^t = 0.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

La solution de (VII.10) s'obtient par analogie avec (II.9) et (II.10) :

$$\text{(VII.11)} \quad \left[\varepsilon_{qx}^r = \varepsilon_{qx}^t = -i q \nu \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\alpha_q}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} h_q \exp \left(i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \right.$$

$$(VII.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{qy}^r &= \varepsilon_{qy}^t = i k \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\alpha_q^2 - \gamma_q^r \gamma_q^t}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} h_q \exp \left(i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \\ \varepsilon_{qz}^r &= i q \nu \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\gamma_q^t}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} h_q \exp \left(i \frac{q}{|q|} \psi_q \right), \\ \varepsilon_{qz}^t &= i q \nu \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\gamma_q^r}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} h_q \exp \left(i \frac{q}{|q|} \psi_q \right). \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, les champs diffractés dans le q^{me} ordre sont identiques à ceux que diffracterait, dans le premier ordre, le réseau à profil sinusoïdal R_q dont l'équation serait l'harmonique de rang q de $f(x, y)$:

$$z_q = h_q \cos [q (\mu x + \nu y) - \psi_q].$$

Leur structure est donc celle que nous avons décrite aux chapitres III et IV.

Pour calculer les champs réfléchi et réfracté, il faut prendre $m = 0$ dans les équations (VII.9) et remplacer les ε_p par leurs valeurs (VII.11). On trouve aisément les équations

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{0\perp}^r \rho_{0\perp} + \varepsilon_{0\perp}^t \tau_{0\perp} &= k^2 \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \bar{z}^2, \\ -\varepsilon_{0\parallel}^r \rho_{0\perp} \gamma_0^r + \varepsilon_{0\parallel}^t \tau_{0\perp} \frac{\gamma_0^t}{n} &= k^2 \alpha_0 \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_p (\gamma_p^r - \gamma_p^t)}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} h_p^2, \\ \varepsilon_{0\parallel}^r \rho_{0\perp} - \varepsilon_{0\parallel}^t \tau_{0\perp} n &= k^2 \frac{n^2 - 1}{2} \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_p \beta_p}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} h_p^2, \\ -\varepsilon_{0\perp}^r \rho_{0\perp} \gamma_0^r + \varepsilon_{0\perp}^t \tau_{0\perp} \gamma_0^t &= -k^2 \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left(\gamma_0^t \bar{z}^2 + \frac{n^2 - 1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_p^2 - \gamma_p^r \gamma_p^t}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} h_p^2 \right) \end{aligned}$$

et les solutions, qui ressemblent à (II.11),

$$(VII.12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{0\perp}^r &= 2 k^2 \gamma_0^r \left(\gamma_0^t \bar{z}^2 + \frac{n^2 - 1}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_p^2 - \gamma_p^r \gamma_p^t}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} h_p^2 \right), \\ \varepsilon_{0\parallel}^r &= -\frac{k^2}{2} \frac{\gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_p (\gamma_p^r - \gamma_p^t)}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} [n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha_p (\gamma_p^r + \gamma_p^t)] h_p^2, \\ \varepsilon_{0\perp}^t &= k^2 \left(\frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \right)^2 \left(2 \bar{z}^2 - (\gamma_0^r - \gamma_0^t) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_p^2 - \gamma_p^r \gamma_p^t}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} h_p^2 \right), \\ \varepsilon_{0\parallel}^t &= -\frac{k^2}{2} \frac{n \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_p (\gamma_p^r - \gamma_p^t)}{n^2 \gamma_p^r - \gamma_p^t} [\alpha_0 - \gamma_0^r \alpha_p (\gamma_p^r + \gamma_p^t)] h_p^2. \end{aligned} \right.$$

Si le spectre des harmoniques de $f(x, y)$ est limité de sorte que tous soient de basse fréquence spatiale, nous avons, en première approximation,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0\perp}^r &= -2 k^2 \gamma_0^r \bar{z}^2, & \varepsilon_{0\parallel}^r &= -\mu \nu \frac{n^2 (n^2 - 1) \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{p=1,2,\dots} p^2 h_p^2, \\ \varepsilon_{0\perp}^t &= -\frac{k^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \bar{z}^2, & \varepsilon_{0\parallel}^t &= -\mu \nu \frac{n (n^2 - 1)}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \sum_{p=1,2,\dots} p^2 h_p^2, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit une rotation du plan de polarisation [définie par (III.14)] proportionnelle à la somme finie $\sum_{p=1,2,\dots} p^2 h_p^2$ étendue à tous les harmoniques et

$$(VII.13) \quad (R_1 - R_{01})/R_{01} = -4k^2 \gamma_0^r z^2, \quad (T_1 - T_{01})/T_{01} = -k^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t) z^2.$$

Les défauts de pouvoirs de réflexion et de transmission sont donc proportionnels au carré du nombre d'ondes et au carré moyen de l'amplitude du réseau. Nous trouvons bien une approximation logique qu'aurait pu laisser prévoir la théorie scalaire exposée au chapitre III.

Si, au contraire, le réseau est de fréquence fondamentale élevée, la solution prend la forme approchée

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01}^r &= -i k K \gamma_0^r \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 \delta \sum_{p=1}^{\infty} p h_p^2 + 2i \frac{k}{K} \gamma_0^t z^2 + \dots \right), \\ \varepsilon_{01}^t &= -i k K \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 \delta \sum_{p=1}^{\infty} p h_p^2 + i \frac{k}{K} (\gamma_0^r + \gamma_0^t) z^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

en reprenant les notations (IV.5). L'effet essentiel consiste en des déphasages par réflexion et réfraction proportionnels au nombre d'ondes, à la fréquence spatiale fondamentale du réseau. Mais il y a également influence sur les pouvoirs de réflexion et de transmission,

$$(VII.14) \quad \begin{aligned} (R_1 - R_{01})/R_{01} &= 4k^2 \gamma_0^r \gamma_0^t z^2, \\ (T_1 - T_{01})/T_{01} &= k^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t) z^2 \end{aligned}$$

à rapprocher des relations (IV.7). Les résultats du chapitre IV restent donc valables. Il suffit de remplacer h^2 par $2z^2$.

Le parallélisme se conserve évidemment dans le second cas de polarisation et nous ne jugeons pas utile de transcrire les solutions.

En résumé, nous parvenons donc à des solutions et des conclusions très voisines de celles obtenues dans le cas d'un réseau à profil sinusoïdal, ce à quoi nous nous attendions assez intuitivement. Les approximations adoptées reviennent à négliger les champs diffractés dans les ordres supérieurs au premier par les différents réseaux harmoniques R_p . Elles sont valables dans la mesure où les amplitudes h_p de ces harmoniques forment une suite lentement décroissante.

S'il n'en est pas ainsi le problème, toujours traduit par (VII.9), s'annonce plus compliqué. Toutefois, les conclusions précédentes donnent d'utiles indications et suggèrent la manière de conduire un calcul des champs diffractés, dans chaque cas particulier envisagé. On considère encore la surface du réseau comme superposition de réseaux R_p à profils sinusoïdaux. Connaissant leur amplitude h_p , les expressions (VII.11) indiquent l'ordre de grandeur des champs réduits ε_p . On peut alors porter ces valeurs approchées de ε_p dans (VII.9) et déterminer les champs diffractés ε_q dans un ordre déterminé, avec une meilleure précision. Nous allons appliquer cette méthode dans le cas où les sillons du réseau sont normaux au plan d'incidence.

4. Sillons normaux au plan d'incidence. — Le système (VII.9) se réduit, dans ce cas, à

$$(VII.15) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{01}^t \tau_{01} A_{0m}^t - \varepsilon_{01}^r \dots + \sum_p \varepsilon_p^t A_{p,m+p}^t - \sum^r = A_m^i + A_{0m}^r \tau_{01} - A_{0m}^t \tau_{01}, \\ \varepsilon_{01}^t \tau_{01} \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^t} A_{0m}^t - \varepsilon_{01}^r \dots + \sum_p \varepsilon_p^t \frac{n^2 - \alpha_p \alpha_{-m}}{\gamma_p^t} A_{p,m+p}^t - \end{aligned}$$

$$-\sum^r = -\frac{1 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^r} (A_m^i - A_{0m}^r \rho_{01}) - \frac{n^2 - \alpha_0 \alpha_{-m}}{\gamma_0^t} A_{0m}^t \tau_{01}.$$

Simplifions l'écriture en développant maintenant $f(x, y)$ en série de Fourier à termes non plus réels comme en (VI.5) mais complexes

$$f(x, y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp(-i q K x).$$

Evidemment

$$(VII.16) \quad a_q = \frac{h_q}{2} \exp\left(i \frac{q}{|q|} \psi_q\right), \quad a_{-q} = \frac{h_q}{2} \exp\left(-i \frac{q}{|q|} \psi_q\right)$$

et les coefficients (VI.8) s'écrivent

$$A_q^i = i k \gamma_0^r a_{-q}, \quad A_{pq} = -i k \gamma_p a_{-q}.$$

Nous avons vu que les solutions de première approximation pour ε_q^r et ε_q^t sont les champs $\varepsilon_1^r(R_q)$ et $\varepsilon_1^t(R_q)$ diffractés dans le premier ordre par le réseau harmonique R_q et s'obtiennent à partir de (VII.11) en ne considérant que les composantes suivant Oy et en annulant v

$$(VII.17) \quad \varepsilon_1^r(R_q) = \varepsilon_1^t(R_q) = 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma_q^r + \gamma_q^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} a_q.$$

Cherchons une meilleure approximation. Du système (VII.15), isolons ε_q^r et ε_q^t . En prenant $m = -q$,

$$\varepsilon_q^t - \varepsilon_q^r = i k \sum_p (\varepsilon_p^t \gamma_p^t - \varepsilon_p^r \gamma_p^r) a_{q-p},$$

$$\varepsilon_q^t \gamma_q^t - \varepsilon_q^r \gamma_q^r = -2 i k \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) a_q + i k \sum_p \varepsilon_p^t (n^2 - \alpha_p \alpha_q) a_{q-p} - i k \sum^r \dots$$

D'où

$$\begin{aligned} \varepsilon_q^r &= \varepsilon_1^r(R_q) + \frac{i k}{\gamma_q^r - \gamma_q^t} \left[\sum_p \varepsilon_p^t (\gamma_p^t \gamma_q^t - n^2 + \alpha_p \alpha_q) a_{q-p} - \sum^r \dots \right], \\ \varepsilon_q^t &= \varepsilon_1^t(R_q) + \frac{i k}{\gamma_q^r - \gamma_q^t} \left[\sum_p \varepsilon_p^t (\gamma_p^t \gamma_q^r - n^2 + \alpha_p \alpha_q) a_{q-p} - \sum^r \dots \right]. \end{aligned}$$

En remplaçant les ε_p^r et ε_p^t par leur valeur approchée (VII.16),

$$(VII.18) \quad \begin{aligned} \varepsilon_q^r &= 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma_q^r + \gamma_q^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left[a_q + i k \sum_p a_p a_{q-p} (\gamma_p^r + \gamma_p^t - \gamma_q^t) \right], \\ \varepsilon_q^t &= 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma_q^r + \gamma_q^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left[a_q + i k \sum_p a_p a_{q-p} (\gamma_p^r + \gamma_p^t - \gamma_q^r) \right], \end{aligned}$$

q étant un entier non nul et p un entier quelconque.

Ces expressions tiennent compte maintenant des interactions entre réseaux. Si nous les portons dans les équations (VII.15) avec $m = 0$, nous trouverons une meilleure approximation pour les champs réduits réfléchi et réfracté

$$-\varepsilon_{01}^r \rho_{01} + \varepsilon_{01}^t \tau_{01} = k^2 \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left[z^2 + 2 i k \sum_{q,p} a_{-q} a_p a_{q-p} (\gamma_p^r + \gamma_p^t) \right],$$

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon_{01}^r \rho_{01} \gamma_0^r + \varepsilon_{01}^t \tau_{01} \gamma_0^t = & -k^2 \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \left\{ \gamma_0^t \bar{z}^2 - 2 \sum_q |a_{-q}|^2 (\gamma_q^r + \gamma_q^t) - \right. \\
 & \left. - 2 i k \sum_{q,p} a_{-q} a_p a_{q-p} [(\gamma_q^r + \gamma_q^t) (\gamma_p^r + \gamma_p^t) - \alpha_0 \alpha_q + \alpha_q^2 - \gamma_q^r \gamma_q^t] \right\},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{01}^r = & 2 k^2 \gamma_0^r \left\{ \gamma_0^t \bar{z}^2 - \sum_q |a_{-q}|^2 (\gamma_q^r + \gamma_q^t) + \right. \\
 & \left. + i k \sum_{q,p} a_{-q} a_p a_{q-p} [(\gamma_p^r + \gamma_p^t) (\gamma_0^t - \gamma_q^r - \gamma_q^t) + \alpha_0 \alpha_q - \alpha_q^2 + \gamma_q^r \gamma_q^t] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{VII.19}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{01}^t = & k^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{2} \left\{ (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \bar{z}^2 - 2 \sum_q |a_{-q}|^2 (\gamma_q^r + \gamma_q^t) + 2 i k \sum_{q,p} a_{-q} a_p a_{q-p} \times \right. \\
 & \left. \times [(\gamma_p^r + \gamma_p^t) (\gamma_0^r - \gamma_q^r - \gamma_q^t) + \alpha_0 \alpha_q - \alpha_q^2 + \gamma_q^r \gamma_q^t] \right\}.
 \end{aligned}$$

La même méthode employée dans le cas où le champ magnétique incident est parallèle au plan d'incidence mène, d'abord à la première approximation

$$\begin{aligned}
 \zeta_{1(R_q)}^r = & -2 i k \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha_q - \gamma_0^t \gamma_q^t}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} a_q, \\
 \zeta_{1(R_q)}^t = & -2 i k \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{\alpha_0 \alpha_q - \gamma_0^t \gamma_q^r}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} a_q,
 \end{aligned}
 \tag{VII.20}$$

obtenue par analogie avec (V.8), puis, plus précisément, à

$$\begin{aligned}
 \zeta_q^r = & -2 i k \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} \left\{ a_q (n^2 \alpha_0 \alpha_q - \gamma_0^t \gamma_q^t) + i k \sum_p a_p a_{q-p} \times \right. \\
 & \left. \times \left[n^2 \gamma_0^t + \frac{(\gamma_p^r + \gamma_p^t) (n^2 \alpha_0 \alpha_p^2 \alpha_q + \gamma_0^t \gamma_p^r \gamma_p^t \gamma_q^t) - n^2 \alpha_p (\alpha_q \gamma_0^t + \alpha_0 \gamma_q^t)}{\alpha_p^2 - \gamma_p^r \gamma_p^t} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{VII.21}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta_q^t = & -2 i k \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma_q^r - \gamma_q^t} \left\{ a_q (\alpha_0 \alpha_q - \gamma_0^t \gamma_q^r) + i k \sum_p a_p a_{q-p} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\gamma_0^t + \frac{(\gamma_p^r + \gamma_p^t) (\alpha_0 \alpha_p^2 \alpha_q + \gamma_0^t \gamma_p^r \gamma_p^t \gamma_q^r) - \alpha_p (\alpha_q \gamma_0^t + \alpha_0 \gamma_q^r)}{\alpha_p^2 - \gamma_p^r \gamma_p^t} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

En résumé, les expressions (VII.17) et (VII.20) constituent une première approximation qui revient à admettre que les champs diffractés dans l'ordre q sont égaux aux champs qui seraient diffractés dans le premier ordre par le réseau harmonique R_q . Les solutions (VII.18) et (VII.21), plus précises, tiennent compte des interactions, deux à deux, entre les différents réseaux harmoniques. Une meilleure précision pourrait être obtenue par approximations successives mais exigerait une expression plus rigoureuse des coefficients A .

VIII. Défauts périodiques des réseaux et spectres satellites

Les spectroscopistes connaissent bien l'existence fréquente des « ghosts », raies satellites accompagnant les raies principales données par un réseau. Ce phénomène s'explique [38] par un défaut périodique du réseau, dont la nature et l'origine peuvent être diverses : manque de planéité du support sur lequel il est tracé, défautuosité de la machine traceuse (excentrement de la vis, jeu mécanique, etc.). Nous nous proposons d'étudier le comportement d'un réseau à sillons normaux au plan d'incidence, dont la surface est représentable par l'équation

$$(VIII.1) \quad F(x) = f(x) + g(x),$$

où $f(x)$ décrit le profil idéal, souhaité par le constructeur, de fréquence spatiale $K/2\pi$ et d'allure quelconque (nous ne supposons rien sur son amplitude) et où $g(x)$ caractérise le défaut périodique de fréquence spatiale $K'/2\pi$ beaucoup plus basse que celle de $f(x)$ et d'amplitude petite par rapport à la longueur d'onde utilisée. Un

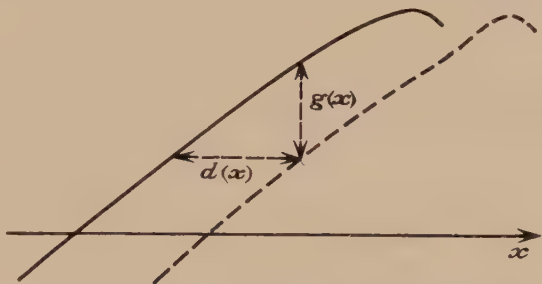


FIG. 12. — En trait plein, position réelle du sillon ; en trait interrompu, position idéale du sillon.

grand nombre de défauts peuvent être ainsi symbolisés, notamment l'un des plus fréquents, l'erreur de mise en place des traits. Dans ce cas, la fonction $g(x)$ est d'ailleurs reliée simplement à $f(x)$ et à la translation accidentelle $d(x)$. On voit sur la figure 12 que $g(x) \simeq f'(x) d(x)$ si $f(x)$ reste borné et si $d(x)$ est petit par rapport à la période spatiale, ce qui se produit généralement.

Pour satisfaire aux conditions aux limites sur la surface (VIII.1) il faut évidemment chercher une solution sous forme de spectres d'ondes planes, mais à ordre double désormais

$$\vec{C} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \vec{E}_{pp'} \exp[-i k (\alpha_{pp'} x + \gamma_{pp'} z)],$$

où

$$\alpha_{pp'} = \sin i + \frac{p K + p' K'}{k}, \quad \gamma_{pp'}^2 = 1 - \alpha_{pp'}^2, \quad \gamma_{pp'}^2 = n^2 - \alpha_{pp'}^2.$$

Mais, pour la recherche des amplitudes $E_{pp'}$ nous confondrons $\alpha_{pp'}$ et $\gamma_{pp'}$ avec α_p et γ_p , K' étant beaucoup plus petit que K .

Il s'agira, encore une fois, d'exprimer les conditions aux limites sur la surface du réseau. Nous trouverons donc des quantités de la forme $\exp[-i k \gamma F(x)]$. Mais, la fonction $g(x)$ a été supposée petite. Par conséquent,

$$\exp[i k \gamma_0^r F(x)] \simeq \exp[i k \gamma_0^r f(x)] [1 + i k \gamma_0^r g(x) - \frac{1}{2} k^2 \gamma_0^r g^2],$$

$$\exp[-i k \gamma_p F(x)] \simeq \exp[-i k \gamma_p f(x)] [1 - i k \gamma_p g(x) - \frac{1}{2} k^2 \gamma_p^2 g^2],$$

Adoptons, par analogie avec (VIII.3), les développements en séries de Fourier

$$\exp[i k \gamma_0^r f(x)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q^i \exp(i q K x),$$

$$\exp[-i k \gamma_p f(x)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{pq} \exp(i q K x)$$

et

$$g(x) = \sum_{q'=-\infty}^{\infty} b_{q'} \exp(-i q' K' x).$$

Nous supposons $b_0 = 0$, ce qui est toujours possible par un choix convenable du plan xOy . Compte tenu de ces notations,

$$\begin{aligned} \exp[i k \gamma_0^r F(x)] &= \sum_q A_q^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r2}}{2 g^2}\right) \exp(i q K x) + \\ &\quad + \sum_q \sum_{q'} i k \gamma_0^r A_q^i b_{q'} \exp[i(q K - q' K') x], \\ \exp[-i k \gamma_p F(x)] &= \sum_q A_{pq} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2 g^2}\right) \exp(i q K x) - \\ &\quad - \sum_q \sum_{q'} i k \gamma_p A_{pq} b_{q'} \exp[i(q K - q' K') x]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en supposant $F(x)$ dérivable,

$$\begin{aligned} F'(x) \exp[i k \gamma_0^r F(x)] &= \sum_q \frac{q K}{k \gamma_0^r} A_q^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r2}}{2 g^2}\right) \exp(i q K x) + \\ &\quad + \sum_q \sum_{q'} i(q K - q' K') A_q^i b_{q'} \exp[i(q K - q' K') x], \\ F'(x) \exp[-i k \gamma_p F(x)] &= - \sum_q \frac{q K}{k \gamma_p} A_{pq} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2 g^2}\right) \exp(i q K x) + \\ &\quad + \sum_q \sum_{q'} i(q K - q' K') A_{pq} b_{q'} \exp[i(q K - q' K') x]. \end{aligned}$$

Ecrivons les conditions aux limites (I.14) et (I.15), en identifiant les termes de même fréquence. Nous devrions, en toute rigueur, distinguer deux cas : K et K' commensurables ou incommensurables. Dans le premier, peuvent se produire des coïncidences périodiques entre les deux gammes de fréquences et non dans le second. Mais nous avons supposé que K' est très faible par rapport à K . Une coïncidence se produirait seulement pour une valeur élevée de l'ordre q' . Or seuls nous intéressent les premiers ordres.

1. Champ électrique incident normal au plan d'incidence. — L'identification dans (I.14) et (I.15) des termes de pulsation $m K$ conduit à

$$\begin{aligned} \sum_p E_{p0}^r A_{p,m+p}^r \left(1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2 g^2}\right) - \sum^t \dots - \sum_{p,p'} E_{pp'}^r i k \gamma_p^r A_{p,m+p} b_{-p'} + \sum^t \dots = \\ \text{(VIII.2)} \hspace{15em} = - E^i A_m^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r2}}{2 g^2}\right), \\ \sum_p E_{p0}^r A_{p,m+p}^r \left(1 - \frac{k^2 \gamma_p^2}{2 g^2}\right) \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{K}{k} \alpha_p\right) - \sum^t \dots - \\ - \sum_{p,p'} E_{pp'}^r i k \gamma_p^r A_{p,m+p} b_{-p'} \left[\gamma_p^r + \frac{(m+p) K - p' K'}{k \gamma_p^r} \alpha_p\right] + \sum^t \dots = \end{aligned}$$

$$= E^i A_m^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^2}{2 g^2} \right) \left(\gamma_0^r + m \frac{K \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right),$$

m, p et p' étant des entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls ; tandis que, pour la pulsation $m K + m' K'$ (m' est un entier non nul) on obtient, en négligeant les termes en $k^2 \overline{g^2}$,

$$\sum_p E_{pm}^r A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots - \sum_{p,p'} E_{pp'}^r i k \gamma_p^r A_{p,m+p}^r b_{m'-p'} + \sum^t \dots =$$

(VIII.3)

$$= - E^i i k \gamma_0^r A_m^i b_{m'},$$

$$\begin{aligned} & \sum_p E_{pm}^r A_{p,m+p}^r \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{K}{k} \alpha_p \right) - \sum^t \dots - \\ & - \sum_{p,p'} E_{pp'}^r i k \gamma_p^r A_{p,m+p}^r b_{m'-p'} \left[\gamma_p^r - \frac{(m+p) K + (m'-p') K' \alpha_p}{k} \frac{1}{\gamma_p^r} \right] + \sum^t \dots = \\ & = E^i i k \gamma_0^r A_m^i b_{m'} \left(\gamma_0^r + \frac{m K - m' K' \alpha_0}{k} \frac{1}{\gamma_0^r} \right). \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans le système (VIII.2) les équations relatives au réseau idéal, avec des termes supplémentaires en $k^2 \overline{g^2}$ et en $E_{pp'}$, beaucoup plus petits que les termes principaux. L'influence du défaut $g(x)$ sur les amplitudes diffractées dans les spectres principaux est donc faible. Nous reviendrons plus tard sur son estimation. Recherchons maintenant les amplitudes des spectres satellites. Les équations (VIII.3) peuvent être réduites, en ne conservant que les termes principaux, à

$$\begin{aligned} \sum_p E_{pm}^r A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots &= - E^i i k \gamma_0^r A_m^i b_{m'}, \\ \sum_p E_{pm}^r A_{p,m+p}^r - \sum^t \dots &= E^i i k \gamma_0^r A_m^i b_{m'} \left(\gamma_0^r + m \frac{K \alpha_0}{k \gamma_0^r} \right). \end{aligned}$$

Au premier membre, la matrice des coefficients est identique à celle relative au réseau idéal et la matrice du second membre est simplement multipliée par $i k \gamma_0^r b_{m'}$. Il s'ensuit que

$$(VIII.4) \quad E_{pp'}^r = E_{p0}^r i k \gamma_0^r b_{p'}, \quad E_{pp'}^t = E_{p0}^t i k \gamma_0^r b_{p'}.$$

Par conséquent, l'amplitude relative d'un champ satellite d'ordre p' par rapport au champ principal est proportionnelle au nombre d'ondes et à l'amplitude, complexe, de l'harmonique de rang $-p'$ de la fonction $g(x)$. Remarquons qu'une approximation scalaire basée sur l'application du principe de Huygens, inspirée par celle que nous avons exposée au chapitre III, aurait permis d'établir rapidement ces proportionnalités. Mais elle ne semble pas capable, du moins simplement, de mener aux équations (VIII.4). En effet, on ne sait, à priori, comment estimer les fluctuations de phase provoquées par le défaut du réseau et, en particulier, quels sont les cosinus directeurs qu'il convient de considérer. Faut-il supposer que les fluctuations affectent l'onde incidente, les ondes réfléchie ou réfractée, ou encore les ondes diffractées dans les spectres principaux ? Les expressions (VIII.4) montrent qu'elles portent sur l'onde incidente. Mais il eût été difficile de le prévoir.

Revenons au système (VIII.2) qui permet le calcul des champs principaux E_{p0} .

Remplaçons-y les $E_{pp'}^r$ par leur valeur (VIII.4). Or

$$\sum_{p'} E_{pp'}^r \mathbf{i} k \gamma_p^r b_{-p'} = -E_{p0} \frac{k^2 \gamma_0^r}{2} \gamma_p^r \bar{g}^2.$$

Donc, en négligeant K' devant K ,

$$\begin{aligned} \sum_p E_{p0}^r A_{p,m+p}^r \left(1 + k^2 \gamma_p^r \frac{\gamma_0^r - \gamma_p^r}{2} \bar{g}^2 \right) - \sum \dots &= -E^i A_m^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r^2}}{2} \bar{g}^2 \right), \\ \sum_p E_{p0}^r A_{p,m+p}^r \left[1 + k^2 \gamma_p^r (\gamma_0^r - \gamma_p^r) \right] \left(\gamma_p^r + \frac{m+p}{\gamma_p^r} \frac{K}{k} \alpha_p \right) - \sum \dots &= \\ &= E^i A_m^i \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r^2}}{2} \bar{g}^2 \right) \left(\gamma_0^r + m \frac{K}{k} \frac{\alpha_0}{\gamma_0^r} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $E_p^r(R_i)$ est l'amplitude diffractée dans l'ordre p par le réseau idéal,

$$E_{p0}^r = E_p^r(R_i) \left(1 - \frac{k^2 \gamma_0^{r^2}}{2} \bar{g}^2 \right) / \left(1 + k^2 \gamma_p^r \frac{\gamma_0^r - \gamma_p^r}{2} \bar{g}^2 \right)$$

ou :

$$(VIII.5) \quad E_{p0}^r = E_p^r(R_i) \left[1 - k^2 \bar{g}^2 \frac{\gamma_0^{r^2} + \gamma_p^r (\gamma_0^r - \gamma_p^r)}{2} \right]$$

et, de la même façon,

$$E_{p0}^t = E_p^t(R_i) \left[1 - k^2 \bar{g}^2 \frac{\gamma_0^{t^2} + \gamma_p^t (\gamma_0^t - \gamma_p^t)}{2} \right].$$

Prenons un exemple pratique. Supposons un réseau à 1 000 traits/mm et admettons que se soit produit, au cours de sa fabrication, une variation périodique de la pression exercée sur le diamant traceur telle que le défaut $g(x)$ soit sinusoïdal d'amplitude $0,025 \mu$ et de période spatiale étendue sur 500 traits : $K' = K/500$. Observons la diffraction par réflexion dans le premier ordre lorsque le faisceau incident, de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu$, est reçu normalement par ce réseau. On calcule aisément que le spectre principal, diffracté à 30° de la normale, porte le champ $E_{10}^r = E_1^r(R_i) (1 - 0,028)$ et se trouve encadré par deux spectres satellites situés symétriquement à une distance angulaire de $11,5 \times 10^{-4}$ rd, soit près de $4'$, et d'amplitude $E_{1,1}^r = E_{1,-1}^r = E_1^r(R_i) \times 0,157$ i.

Malgré la petitesse du défaut, les champs satellites possèdent donc une amplitude non négligeable.

2. Champ magnétique incident normal au plan d'incidence. — Les résultats précédents se transposent immédiatement en considérant les champs magnétiques

$$(VIII.6) \quad \begin{cases} H_{pp'}^r = H_{p0}^r \mathbf{i} k \gamma_p^r b_{p'}, & H_{pp'}^t = H_{p0}^t \mathbf{i} k \gamma_p^t b_{p'}, \\ H_{p0}^r = H_p^r(R_i) \left[1 - k^2 \bar{g}^2 \frac{\gamma_0^{r^2} + \gamma_p^r (\gamma_0^r - \gamma_p^r)}{2} \right], \\ H_{p0}^t = H_p^t(R_i) \left[1 - k^2 \bar{g}^2 \frac{\gamma_0^{t^2} + \gamma_p^t (\gamma_0^t - \gamma_p^t)}{2} \right]. \end{cases}$$

En conclusion, la mesure des amplitudes des spectres satellites mène à une ana-

lyse harmonique du défaut $g(x)$ du réseau et le défaut relatif d'intensité diffractée dans un ordre déterminé est proportionnel au carré moyen g^2 .

Nous avons supposé $g(x)$ périodique. Nos conclusions s'appliquent donc aux « ghosts » de Rowland résultant d'un défaut de même périodicité que la vis de la machine traceuse. Mais elles s'appliquent également aux « ghosts » de Lyman qui sont provoqués par des défauts qui n'ont pas la périodicité de la vis-mère, mais sont cependant périodiques ainsi que l'ont montré A. Maréchal & M. Françon ([33] p. 30).

Si le défaut $g(x)$ n'est pas périodique l'énergie électromagnétique soustraite aux spectres principaux ne se trouve plus localisée en des spectres satellites discontinus, mais diffusée d'une façon continue. Nous reviendrons donc sur ce problème après avoir étudié, d'une manière générale, la diffusion superficielle.

TROISIÈME PARTIE

DIFFUSION SUPERFICIELLE

IX. Théorie scalaire et étude expérimentale

La diffusion qui accompagne la réflexion d'une onde par une surface imparfaitement polie a déjà fait l'objet de nombreux travaux, aussi bien dans le domaine de l'optique classique que dans celui des ondes hertziennes [39 à 44]. Les recherches expérimentales les plus anciennes, faute de récepteur photométrique très sensible, n'ont guère porté que sur des surfaces dépolies de verre ou de métal [39 à 41]. La diffusion par ces corps s'explique immédiatement par la réflexion ou la réfraction par les nombreuses facettes d'inclinaison variable composant la surface dépolie. L'interprétation de ce phénomène ne fait donc appel qu'à l'optique géométrique. Cependant, A. Lafay [40] ayant, dès 1898, constaté l'influence de la longueur d'onde, la nécessité d'une théorie ondulatoire se fit jour. L'emploi de la méthode photographique permit à Urbanek [42] d'observer des surfaces polies et de confirmer le fait que lorsque les défauts de poli sont de faibles dimensions par rapport à la longueur d'onde, leur diffusion est un phénomène de diffraction.

Toutefois, on resta longtemps sans en tirer les conclusions que l'on eût été en mesure de dégager. Nous avons déjà noté que l'étude de la diffusion par des défauts de forme simple donnée [11 à 13] ne contribue guère à l'élaboration d'une théorie générale. Par contre, A. Maréchal [45], s'appuyant sur le fait que la répartition de l'amplitude lumineuse dans une figure de diffraction s'exprime par la transformée de Fourier de la répartition de l'amplitude sur la surface diffractante, élaborait une théorie basée sur l'analyse harmonique de la surface et établit une loi de diffusion applicable à une surface quelconque. Sous une forme légèrement différente mais basée sur les mêmes principes, exposons l'essentiel de cette théorie que nous qualifierons de théorie scalaire.

1. Théorie scalaire. — Scalaire, car elle utilise le principe de Huygens-Fresnel sous sa forme la plus simple, cette théorie s'applique aux surfaces optiques de

quelque qualité telles que leurs irrégularités soient de dimensions nettement inférieures à la longueur d'onde. Elle procède de la même hypothèse fondamentale que celle que nous avons exposée au chapitre III : la surface diffusante est considérée comme un pur objet de phase, c'est-à-dire qu'elle provoque seulement des fluctuations de phase dans les ondes réfléchie et transmise. Celles-ci possèdent donc des amplitudes totales, dans le plan moyen xOy du dioptré,

$$(IX.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}^r(x, y, 0) &= U^1 \rho_0 \exp(-i k x \sin i) \exp[i \varphi_r(x, y)], \\ \mathcal{U}^t(x, y, 0) &= U^1 \tau_0 \exp(-i k x \sin i) \exp[i \varphi_t(x, y)], \end{aligned}$$

ρ_0 et τ_0 étant les facteurs de réflexion et de transmission du dioptré idéalement plan et avec

$$(IX.2) \quad \varphi_r(x, y) = 2 k \gamma_0^r f(x, y), \quad \varphi_t(x, y) = k (\gamma_0^r + \gamma_0^t) f(x, y),$$

les conventions et notations restant toujours celles du chapitre I. Mais la différence est que la fonction $f(x, y)$ décrivant la surface diffusante n'est plus une fonction analytique simple. Cependant, restant bornée, par hypothèse, à des valeurs faibles par rapport à la longueur d'onde, les avances de phase $\varphi_r(x, y)$ et $\varphi_t(x, y)$ sont petites et

$$\exp[i \varphi(x, y)] \simeq 1 + i \varphi(x, y) - \frac{1}{2} \varphi^2(x, y) + \dots$$

ou, en séparant valeur moyenne et valeur fluctuante,

$$(IX.3) \quad \exp[i \varphi(x, y)] \simeq 1 - \frac{1}{2} \overline{\varphi^2} + \dots + i \varphi(x, y) + \dots$$

Représentons la fonction $f(x, y)$ par une intégrale de Fourier

$$(IX.4) \quad f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(\mu, \nu) \exp[-i (\mu x + \nu y)] d\mu d\nu.$$

Nous reviendrons plus loin sur la légitimité de cette représentation et la manière dont il faut la concevoir. Nous adoptons cette forme non classique de l'intégrale de Fourier afin d'alléger l'écriture en évitant les facteurs 2π et de manière à conserver des pulsations comme dans tout ce qui précède. Nous y perdons évidemment la réversibilité de la transformation de Fourier ; il ne faudra pas oublier que

$$(IX.5) \quad a(\mu, \nu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint f(x, y) \exp[i (\mu x + \nu y)] dx dy.$$

Nous supposons la stationnarité de $f(x, y)$ et convenons d'étendre l'intégrale à un domaine d'aire unité dans le plan xOy . Les diffusions que nous calculerons par la suite se rapporteront donc à l'unité de surface diffusante.

Compte tenu de l'équation (IX.4), portons le facteur de phase (IX.3) dans (IX.1). Séparons dans les expressions des champs totaux les termes des différentes fréquences spatiales :

$$\mathcal{U}_0^r(x, y, 0) = U^1 \rho_0 (1 - 2 k^2 \gamma_0^{r2} \overline{z^2}) \exp(-i k x \sin i),$$

$$\mathcal{U}_0^t(x, y, 0) = U^1 \tau_0 \left[1 - \frac{k^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \overline{z^2} \right] \exp(-i k x \sin i),$$

$$\mathcal{U}^r(x, y, 0) = U^1 \rho_0 2 i k \gamma_0^r a(\mu, \nu) \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + \frac{\mu}{k} \right) x + \frac{\nu}{k} y \right] \right\},$$

$$\mathcal{U}^t(x, y, 0) = U^1 \tau_0 i k (\gamma_0^r + \gamma_0^t) a(\mu, \nu) \exp \left\{ -i k \left[\left(\sin i + \frac{\mu}{k} \right) x + \frac{\nu}{k} y \right] \right\}.$$

Les deux premiers termes donnent les amplitudes des champs régulièrement

réfléchi et réfracté. Ecrivons les pouvoirs de réflexion et de transmission du dioptré :

$$(IX.6) \quad R = R_0 (1 - 4 k^2 \gamma_0^r z^2), \quad T = T_0 [1 - k^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 z^2].$$

Les termes suivants indiquent la contribution de la diffusion. Le champ diffusé total peut donc être représenté par un spectre d'ondes planes, mais un spectre continu à la différence de ce qui se produirait avec un réseau,

$$(IX.7) \quad \mathcal{U} = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\mu, \nu) \exp[-i k (\alpha x + \beta y + \gamma z)] d\mu d\nu,$$

avec la densité d'amplitude

$$(IX.8) \quad \begin{aligned} U^r(\mu, \nu) &= U^i \rho_0 2 i k \gamma_0^r a(\mu, \nu), \\ U^t(\mu, \nu) &= U^i \tau_0 i k (\gamma_0^r + \gamma_0^t) a(\mu, \nu) \end{aligned}$$

et

$$(IX.9) \quad \begin{aligned} \alpha &= \sin i + (\mu/k), & \beta &= \nu/k, \\ \gamma^r &= 1 - \alpha^2 - \beta^2, & \gamma^t &= n^2 - \alpha^2 - \beta^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, les défauts relatifs de facteurs de réflexion et de transmission par rapport à ceux d'un dioptré parfaitement plan sont proportionnels au carré du nombre d'ondes et au carré moyen des irrégularités de surface, et la diffusion dans les directions de cosinus directeurs α, β, γ^r et $\alpha/n, \beta/n, \gamma^t/n$ est imputable à la pulsation spatiale μ, ν déterminée par (IX.9). Au lieu de l'expression (IX.7) on peut donner une signification géométrique plus immédiate au spectre d'ondes diffusées en le notant sous forme de spectre angulaire

$$(IX.10) \quad \mathcal{U}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta) \exp[-i k (\alpha x + \beta y + \gamma z)] d\alpha d\beta$$

avec, évidemment,

$$(IX.11) \quad \begin{aligned} U^r(\alpha, \beta) &= U^i \rho_0 2 i k^3 \gamma_0^r a[k(\alpha - \alpha_0), k\beta], \\ U^t(\alpha, \beta) &= U^i \tau_0 i k^3 (\gamma_0^r + \gamma_0^t) a[k(\alpha - \alpha_0), k\beta]. \end{aligned}$$

Si le spectre (IX.4) de $f(x, y)$ est illimité, le spectre d'ondes diffusées (IX.10) l'est également et comporte donc des ondes réelles, diffusées à l'infini, pour lesquelles $\gamma^2 > 0$, et des ondes évanescentes restant au voisinage de la surface, pour lesquelles $\gamma^2 < 0$.

Cette théorie scalaire conduit donc à des résultats fort simples. Confrontons-la avec les faits expérimentaux.

2. Faits expérimentaux. — Nous nous limiterons au domaine de l'optique classique car c'est là que nous possédons le plus de renseignements.

1. Répartition de l'énergie diffusée. — L'observation de la diffusion s'effectue évidemment dans le plan focal d'un objectif. Lorsque celui-ci est axé sur le faisceau réfléchi (fig. 13) la répartition des champs dans son plan focal s'exprime à l'aide de la transformée de Fourier de la distribution des champs sur la pupille diffractante P

$$U(\alpha', \beta') = \frac{i k \gamma_0^r}{2 \pi l} \iint_P U(x, y, 0) \exp(i k x \sin i) \exp[i k (\alpha' \gamma_0^r x + \beta' y)] dx dy,$$

l étant la longueur focale de l'objectif.

L'intégration s'effectue très simplement du fait que $\mathcal{U}(x, y, 0)$ s'exprime aussi, d'après (IX.10), par une intégrale de Fourier. On en déduit

$$U(\alpha', \beta') = -U^1 \rho_0 4 \pi \frac{k^2}{l} \gamma_0^r a(k \gamma_0^r \alpha', k \beta'),$$

d'où une intensité

$$(IX.12) \quad I(\alpha', \beta') = I^1 R_0 16 \pi^2 \frac{k^4}{l^2} \gamma_0^r |a(k \gamma_0^r \alpha', k \beta')|^2.$$

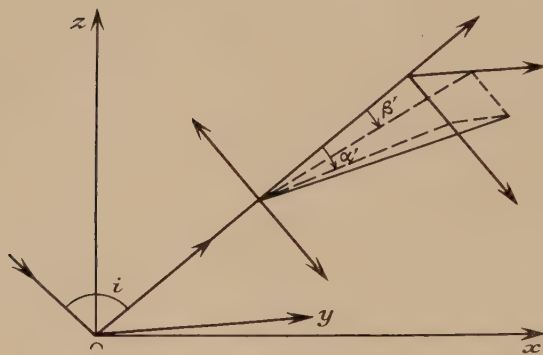


Fig. 13.

Par conséquent, si l'on rapporte la répartition d'éclairement aux coordonnées réduites $k \gamma_0^r \alpha'$ et $k \beta'$, on devrait la trouver proportionnelle à k^4 ou $1/\lambda^4$ et à une fonction liée simplement à l'équation de la surface : le carré de sa transformée de Fourier.

R. Prat a effectivement vérifié une telle loi dans le domaine des longueurs d'onde optiques [46], en mesurant grâce à un photomultiplicateur à 20 étages

et de gain 10^8 , la diffusion, dans une zone de quelques minutes seulement de part et d'autre de la direction de réflexion, d'un échantillon de verre noir très bien poli. Pour notre part, nous ne sommes pas parvenu à vérifier directement la formule (IX.12). Il est vrai que notre photomultiplicateur à 10 étages, avec un gain de 600 000 seulement ne nous a pas permis d'étudier, dans les mêmes conditions, des échantillons aussi bien polis. Mais avant de décrire notre montage examinons les impératifs qui doivent guider la réalisation de toute mesure de diffusion.

Avant toute chose, il convient de ne pas oublier que le récepteur photométrique mesure le flux lumineux pénétrant par sa fente d'entrée F placée dans le plan focal de l'objectif,

$$(IX.13) \quad \Phi = I^1 R_0 16 \pi^2 k^4 \gamma_0^r \iint_F |a(k \gamma_0^r \alpha', k \beta')|^2 d\alpha' d\beta'.$$

Or, pour des surfaces assez bien polies, l'intensité diffusée décroît très rapidement quand on s'écarte de la direction de réflexion régulière. Cela signifie que la fonction $a(k \gamma_0^r \alpha', k \beta')$ varie aussi très vite avec α' et β' . Par conséquent pour qu'une mesure permette d'atteindre cette fonction, ou son carré plus exactement, il faut que la fente F soit de très petites dimensions de manière que son ouverture $\Delta\alpha' \Delta\beta'$ reste très faible.

Une bonne précision sur α' et β' ne peut s'assortir que d'une précision égale sur la définition de l'incidence. D'où l'obligation de limiter la fente-source à de faibles dimensions aussi bien longitudinale que transversale et de diaphragmer assez étroitement le faisceau incident. D'autre part, l'onde incidente doit être plane, homogène et cohérente, donc la fente-source placée au foyer du collimateur. La méthode consistant à former son image sur l'échantillon ne nous paraît pas réaliser de manière satisfaisante les conditions théoriques : la cohérence n'existe que dans

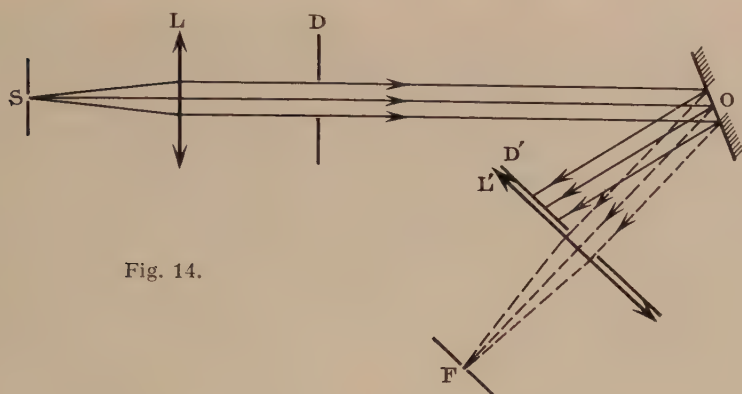


Fig. 14.

la tache de diffraction image d'une source ponctuelle, dont les dimensions ne sont en général pas suffisantes par rapport aux accidents de la surface polie et à l'intérieur de laquelle l'amplitude est loin d'être uniforme. Par conséquent, un montage correct doit être basé sur le schéma de principe de la figure 14, où les fentes ne doivent pas être très hautes.

La diffusion parasite par l'objectif L' d'observation se révèle très gênante. Il faut disposer devant lui un diaphragme D' un peu plus large que D de façon à intercepter le faisceau réfléchi lorsque l'on observe la diffusion. Cette interception n'est réalisée qu'à partir d'une certaine distance de la direction de réflexion de sorte qu'il existe un angle mort où les mesures sont incertaines. Si l'on ajoute à cela que le diaphragme D diffracte, on voit qu'il est impossible de mesurer la diffusion très proche.

Remarquons enfin que la théorie proposée ne tient pas compte de la limitation du faisceau incident. Pour qu'elle s'applique approximativement, il faut que le diaphragme D ne soit pas trop petit.

Toutes les conditions énumérées, jointes à la nécessité d'opérer en lumière monochromatique, sont évidemment très défavorables au point de vue photométrique, les flux à mesurer restant extrêmement faibles. De plus, pour comparer les diffusions observées pour des longueurs d'onde différentes, il s'agit de mesurer le rapport Φ/Φ^i du flux diffusé capté par la fente F au flux incident total. Si la fente F est très étroite, il convient donc de lui substituer une autre, plus grande, afin d'être sûr de recueillir la totalité du flux incident qui, en réalité, est diffracté par le diaphragme D. Une cause importante d'erreur provient de l'énorme différence entre Φ et Φ^i . Aucun récepteur photométrique ne possède une réponse suffisamment linéaire pour qu'une comparaison directe puisse être effectuée et l'utilisation de deux récepteurs de sensibilités spectrales différentes compliquerait le problème. L'interposition sur le faisceau incident de densités étalonnées, de transparence connue en fonction de la longueur d'onde, évite cet inconvénient. La méthode consistant à mesurer plutôt le flux régulièrement réfléchi introduit plus d'incertitude car le pouvoir réflecteur de l'échantillon est différent de celui d'un dioptre parfaitement plan et dépend de la longueur d'onde.

La plupart des expérimentateurs qui se sont intéressés à la diffusion l'ont mesurée seulement dans le plan d'incidence. Du point de vue mécanique, cette

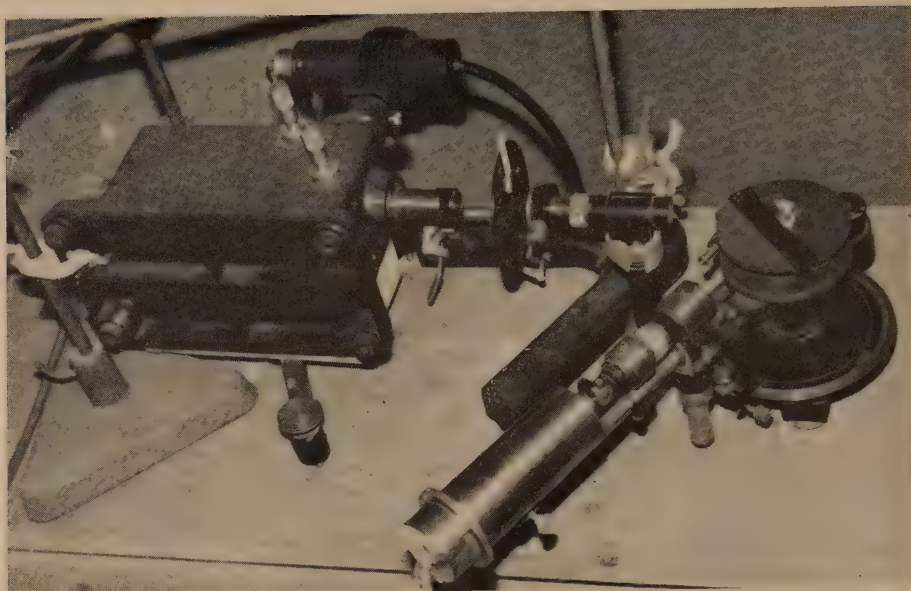


Fig. 15.

limitation apporte bien sûr une grande simplification. Un goniomètre suffit. Mais on ne semble pas avoir soupçonné le problème particulier qu'elle soulève. On admet implicitement avoir mesuré l'intensité diffusée $I(\alpha', 0)$, alors même que la fente réceptrice F utilisée est d'une grande hauteur. En fait, nous l'avons déjà remarqué, la grandeur mesurée est le flux (IX.13) et si l'on veut qu'elle soit proportionnelle à $I(\alpha', 0)$ il faut que la direction moyenne d'observation soit telle que $\beta' = 0$ et que l'ouverture $\Delta\beta'$ de F soit très petite. Donc, le goniomètre doit assurer une excellente précision mécanique dans l'horizontalité du faisceau incident et de la lunette et dans la verticalité de l'échantillon. Et surtout, fente-source S et fente réceptrice F doivent avoir une hauteur très réduite. Sinon, le signal mesuré résulte d'une intégration, entre des bornes mal déterminées, d'une fonction rapidement variable.

Nous avons réalisé un montage (fig. 15) en tenant compte des considérations précédentes. Le monochromateur utilisé appartient au type Desvignes. Sa source est constituée par une lampe de 500 W à vapeur de mercure à haute pression et à émission dirigée, refroidie par circulation d'eau. L'inconvénient d'une telle lampe est l'instabilité de son émission qu'il faut contrôler à l'aide d'une cellule photoélectrique. Nous avons ajouté un polariseur avant le diaphragme D . Le goniomètre permet l'appréciation de la minute. Quant au récepteur photométrique, nous ne disposons que d'un photomultiplicateur à 10 étages de gain 600 000. Le système de fentes et diaphragmes répond aux caractéristiques suivantes : S , $0,18 \times 2$ mm ; D , $0,90 \times 5$ mm ; D' , 1×18 mm ; F , $0,20 \times 2,2$ mm ; $LD = 8$ cm ; $DO = 22,5$ cm ; $OD' = 10$ cm ; $SL = FL' = 12,5$ cm.

Dans ces conditions, nous n'avons pas pu mesurer la diffusion par les échantillons les mieux polis de la gamme dont nous disposons : des verres transparents



FIG. 16. — Echantillon n° 5,
grandissement 36 000.



FIG. 17. — Echantillon n° 7,
grandissement 21 000.

au borosilicate, numérotés par polissage croissant de 1 à 10, le n° 1 étant seulement douci, le n° 10 d'un bon poli. Avec le système de fentes décrit plus haut, nous n'avons pu étudier que les échantillons n°s 1 à 7. Nous n'avons jamais trouvé de loi en k^4 . La variation de la diffusion avec la longueur d'onde s'est toujours révélée inférieure à celle que prévoit la formule (IX.12). La diffusion par le n° 1 dépend très peu de la longueur d'onde. Les accidents de sa surface sont probablement assez grands pour que la majeure partie de la diffusion tire son origine de simples réflexions sur les diverses facettes. Nous ne nous sommes pas attardé à ce cas qui a déjà été considéré et ne relève manifestement pas de notre étude théorique. Pour des échantillons ayant subi un début de polissage et dont les irrégularités ont une amplitude dans tous les cas largement inférieure à la longueur d'onde, ainsi que nous l'avons vérifié par une observation interférométrique, l'influence de la longueur d'onde se manifeste nettement et s'accroît constamment au fur et à mesure que s'affine le polissage. Pour l'échantillon n° 5, dont la figure 16 reproduit une photographie prise au microscope électronique, la loi empirique

$$(IX.14) \quad I(\alpha', 0) = k^2 g(k \gamma_0^r \alpha')$$

est la loi simple la plus proche de la réalité, sans être toutefois extrêmement satisfaisante, ainsi que le montre la figure 18 représentant en unité arbitraire, $I(\alpha', 0)/k^2$ pour une incidence $i = 60^\circ$ et les longueurs d'onde $\lambda_J = 5\,790 \text{ \AA}$, $\lambda_V = 5\,460 \text{ \AA}$, $\lambda_B = 4\,353 \text{ \AA}$ (courbes J, V et B), le champ électrique incident étant normal au plan d'incidence. Les trois courbes sont en effet très voisines. Elles n'ont cependant pas exactement la même allure puisqu'elles se coupent.

Pour les échantillons mieux polis les courbes B passent au-dessus des courbes V et J, comme l'illustre la figure 19 relative à l'échantillon n° 7, dont on peut voir la photographie sur la figure 17, et obtenue dans les mêmes conditions que la

FIG. 18. — Echantillon
n° 5, $i = 60^\circ$.

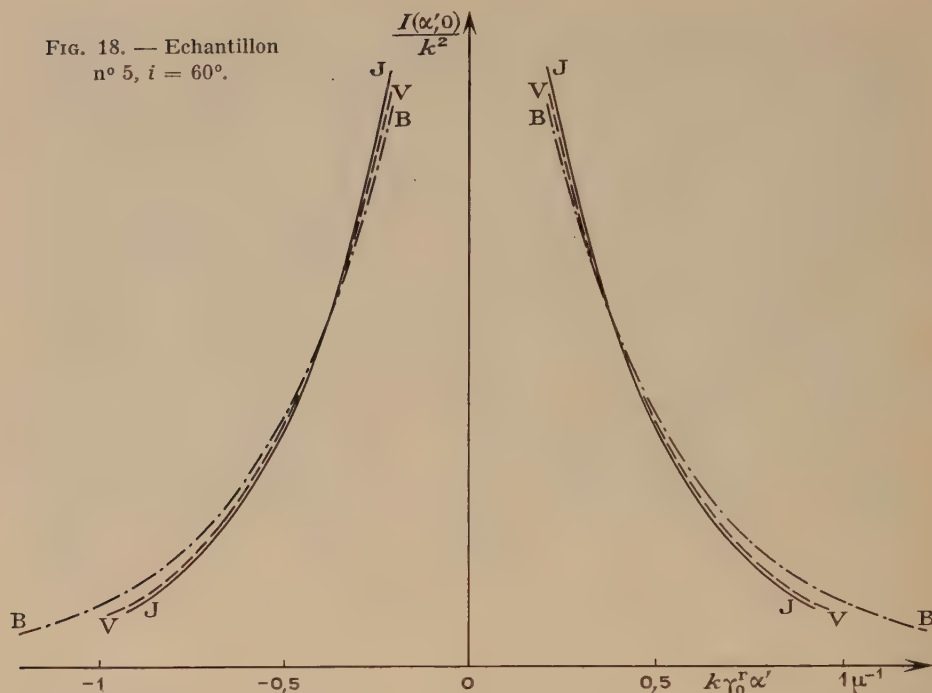


figure 18. La loi (IX.14) ne s'applique plus, mais pas davantage une loi en k^4 . En fait, la proportionnalité serait voisine de k^3 .

Ces expériences suggèrent que la loi (IX.12) en k^4 est une loi limite que nous n'avons pu atteindre par suite de la sensibilité insuffisante de notre appareillage. Cependant, à défaut d'une vérification directe de cette loi, nous en avons tenté une vérification indirecte. Renonçant à mesurer $I(\alpha', 0)$ nous avons cherché à estimer le flux diffusé dans un angle $\Delta\alpha'$ toujours petit, le même que précédemment, $5'$ environ, mais dans un intervalle $\Delta\beta'$ le plus grand possible, 5° , obtenu en démasquant la fente réceptrice F sur toute la hauteur qu'autorise le diamètre de la lunette L' (fig. 14) et la source S sur une hauteur de 5 mm. La diffusion décroissant très rapidement dès que l'on s'écarte de $\beta' = 0$, nous pouvons pratiquement considérer l'ouverture $\Delta\beta'$ comme infinie. D'après (IX.13), le flux mesuré est donc

$$\Phi \simeq I^1 R_0 16 \pi^2 k^4 \gamma_0^r \int_{\alpha' - (\Delta\alpha'/2)}^{\alpha' + (\Delta\alpha'/2)} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k \gamma_0^r \alpha', k \beta')|^2 d\alpha' d\beta'$$

ou

$$\Phi \simeq I^1 R_0 16 \pi^2 k^3 \gamma_0^r \Delta\alpha' \int_{-\infty}^{\infty} |a(k \gamma_0^r \alpha', v)|^2 dv$$

et doit obéir, par conséquent, à une loi de la forme

$$(IX.15) \quad \Phi/\Phi^1 = k^3 G(k \gamma_0^r \alpha').$$

Grâce à l'allongement des fentes S et F, les flux à mesurer deviennent plus importants et nous avons pu étudier l'échantillon n° 8, toujours pour $i = 60^\circ$ et un champ électrique incident normal au plan d'incidence. Les résultats apparaissent sur la figure 20. Les courbes représentant $\Phi/\Phi^1 k^3$ pour les trois nombres d'ondes

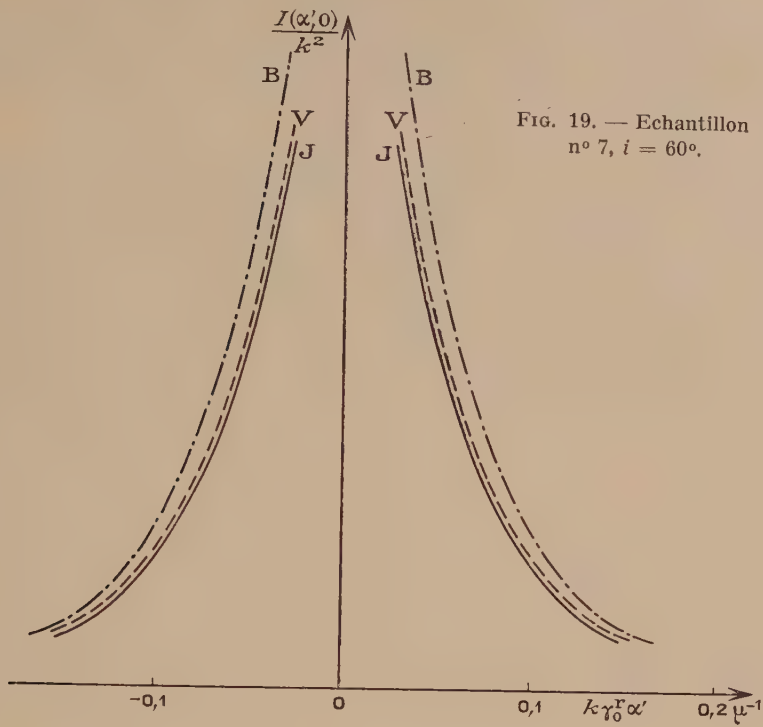


FIG. 19. — Echantillon n° 7, $i = 60^\circ$.

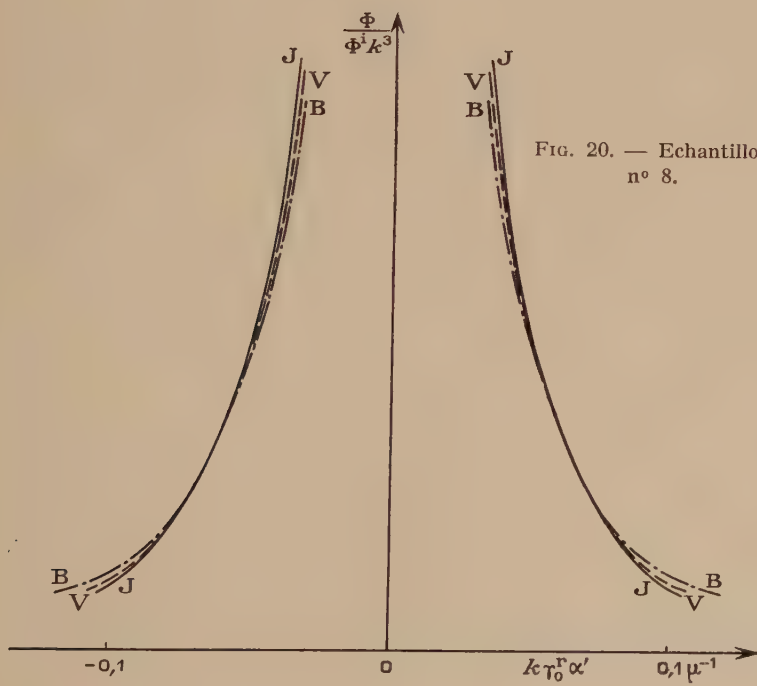


FIG. 20. — Echantillon n° 8.

J, V et B sont pratiquement confondues dans la diffusion proche. Elles ne se rejoignent que dans la diffusion lointaine mais là, les mesures deviennent plus incertaines. Il semble donc que la formule (IX.15) soit vérifiée et justifiée par conséquent la loi (IX.12).

2. Pouvoir réflecteur. — Parallèlement à la mesure de la répartition de l'énergie diffusée, il eût été intéressant de mener une étude détaillée du pouvoir réflecteur. Nous l'avons effectivement entreprise avec les échantillons n^{os} 1 à 7, mais non avec les surfaces bien polies. Mais peu d'éléments nouveaux se dégagent de nos mesures et nous nous bornons à en indiquer les grandes lignes. Le pouvoir réflecteur dépend très peu de la longueur d'onde pour les surfaces doucies, puis de plus en plus quand le poli s'améliore. Pour l'échantillon n^o 5, il obéit sensiblement à la loi linéaire $R_{\perp} = R_{0\perp} (1 - 0,013 k)$, k étant exprimé en μ^{-1} , ainsi qu'il apparaît

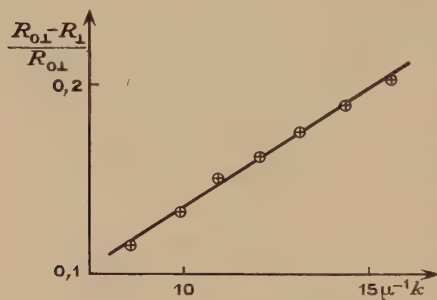


FIG. 21. — Echantillon n^o 5.

sur la figure 21. Mais cette forme de loi cesse d'être valable pour les échantillons mieux polis. Ces résultats, très cohérents avec ceux relatifs à la diffusion, laissent penser que pour les échantillons n^{os} 8 et suivants, le pouvoir réflecteur obéirait à la loi (IX.6). Mais l'écart avec R_0 devient si faible qu'une haute précision photométrique s'impose, que nous n'avons pu obtenir. Nous n'avons d'ailleurs pas insisté dans cette voie, persuadé que le domaine des longueurs d'onde optiques n'est pas

le plus propice à ce genre d'études pour des raisons que nous exposerons plus loin. De plus quelques travaux ont déjà été consacrés à ce sujet et ont confirmé la proportionnalité de $(R - R_0)/R_0$ au carré du nombre d'ondes [47, 48]. Notons pourtant qu'il ne faut pas conclure prématurément à l'exactitude de la loi (IX.6).

3. Discussion des résultats. — Des faits expérimentaux rapportés plus haut, il apparaît que la loi (IX.12) de répartition de la diffusion est une loi limite vérifiée par des surfaces bien polies dont les irrégularités ont une amplitude très nettement inférieure à la longueur d'onde. Pour les polis moyens, elle se trouve en défaut ; l'intensité diffusée $I(\alpha', \beta')$ n'est pas rigoureusement le produit de k^4 par une fonction de $k \gamma_0^r \alpha'$ et $k \beta'$, comme le montre l'allure des courbes expérimentales, légèrement variable suivant la longueur d'onde employée.

Il est permis de s'étonner du caractère très restrictif des conditions d'application de cette loi. En effet, certaines surfaces dont la diffusion n'y obéit pas ont pourtant des défauts manifestement inférieurs à la longueur d'onde, de l'ordre de 100 Å par exemple ainsi que le laisse penser leur photographie au microscope électronique. Dans ces conditions, la validité du développement en série (IX.3) ne saurait être suspectée. L'addition de termes supplémentaires semble nettement insuffisante pour justifier les résultats expérimentaux. De plus, la formule (IX.12) ne laisse nullement prévoir la différence d'allure que nous avons constatée entre les courbes de diffusion d'un même échantillon obtenues pour les deux cas principaux de pola-

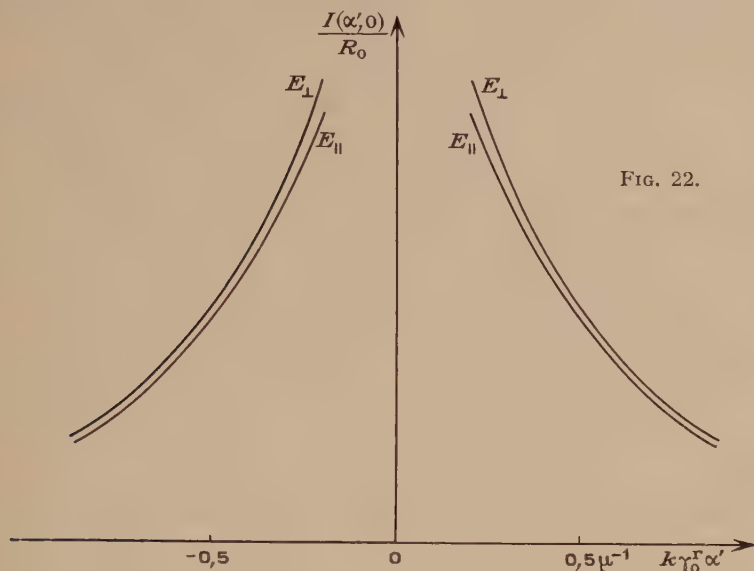


FIG. 22.

risation incidente, différence d'autant plus grave que le poli est plus médiocre. La figure 22 montre un exemple relatif au verre n° 5. Par conséquent, c'est le principe même de la théorie scalaire qui se trouve mis en cause et l'ensemble de celle-ci qui constitue une théorie limite.

Toutefois, elle a le mérite de montrer simplement la relation entre la répartition de l'énergie diffusée et le spectre des fréquences spatiales des défauts de la surface diffusante. Même si, quantitativement, elle ne donne pas de résultats précis, cette relation ne saurait être mise en doute et, d'ores et déjà, nous pouvons déduire des faits expérimentaux quelques conclusions qualitatives.

Une surface polie de quelque qualité ne diffuse pratiquement que dans le voisinage immédiat de la direction de réflexion spéculaire. Cela indique, d'après les relations (IX.9), que seules ont une amplitude appréciable les composantes de basse fréquence spatiale du spectre de Fourier de la fonction $f(x, y)$ décrivant la surface diffusante. Autrement dit, le module de la fonction $a(\mu, \nu)$, transformée de Fourier de $f(x, y)$, diminue très rapidement quand croissent μ et ν . Est-ce à dire que l'on peut considérer $a(\mu, \nu)$ comme nul pour les moyennes et hautes fréquences spatiales ? On l'admet difficilement en regardant les figures 16 et 17. Celles-ci montrent des accidents de faible étendue mais dont l'amplitude n'est pas nécessairement négligeable par rapport à celle des grandes ondulations et qui doivent se traduire dans le spectre de Fourier par des composantes de haute fréquence. On est ainsi amené à penser que la fonction $|a(\mu, \nu)|$ présente l'allure indiquée par la figure 23, que l'on doit compléter en opérant une rotation autour de l'axe des a si la surface possède une certaine isotropie statistique. Le spectre comporterait deux domaines disjoints que nous noterons en abrégé B. F. et H. F. Précisons bien que ces appellations doivent être comprises aux sens que nous leur avons attribués aux chapitres III et IV : une ondulation est dite B. F. si elle provoque une diffraction à l'infini dans les premiers ordres (sauf si l'incidence est rasante) ou H. F. si

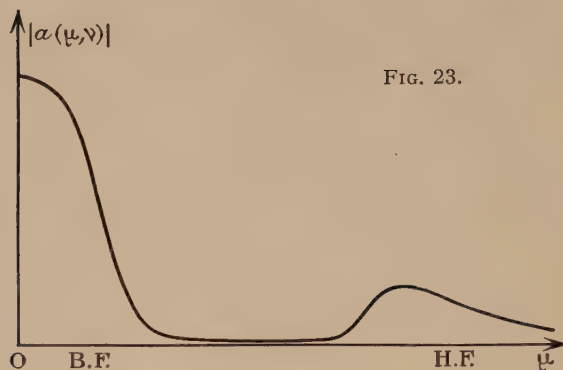


FIG. 23.

elle ne donne naissance qu'à des ondes évanescentes. Ainsi tous les défauts des poliss optiques décrits par J. Texereau [49], accidents de mise en forme affectant l'allure d'ensemble de la surface, mamelonnage principal de largeur de l'ordre du centimètre et même micromamelonnage de période spatiale de l'ordre de 0,1 à 2 mm, appartiennent à la B. F. La

H. F. résulte vraisemblablement de la subsistance de résidus de douci de zones non atteintes par le polissage où la structure brute, anarchique du matériau s'est conservée ou bien d'une corrosion chimique au contact de l'air. En résumé, il semble que le propre du polissage soit d'éliminer les moyennes fréquences spatiales. D'ailleurs, c'est bien ce qu'admet implicitement l'ouvrier opticien qui suit les progrès du polissage en observant l'atténuation progressive de la diffusion « visible », c'est-à-dire à l'infini et qui considère son travail terminé lorsque la diffusion lui semble limitée à un domaine assez étroit au voisinage de la réflexion spéculaire. Quelle est alors, à ce stade, l'importance relative de la B. F. et de la H. F. ? Comment évolue-t-elle au cours du polissage ? Comment l'estimer ? Voilà des problèmes d'un grand intérêt pratique auxquels les techniques d'observation interférométrique [50], par contraste de phase [51] ou au microscope électronique n'apportent pas encore de réponse précise et quantitative. Nous envisagerons plus loin la possibilité d'une solution utilisant la diffusion.

Quoi qu'il en soit, on ne semble pas avoir attaché jusqu'ici d'importance à ces microaccidents de H. F. Du fait qu'ils ne peuvent pas diffuser directement à l'infini, on a tendance à les négliger. On invoque aussi le fait que les ondes évanescentes « sont de faible amplitude ». C'est là un raccourci impropre ou, du moins, imprécis. Leur amplitude, décroissant exponentiellement quand croît la distance à la surface leur ayant donné naissance, paraît effectivement petite à un observateur qui ne peut les capter que fortement atténuées. Mais, sur la surface elle-même, leur amplitude n'est pas nécessairement plus faible que celle d'une onde diffractée à l'infini, ainsi qu'on peut le constater d'après notre étude du réseau à profil sinusoidal. Or, c'est justement cette valeur qui importe puisque la diffusion superficielle est un phénomène aux limites. De plus, elles peuvent rayonner en quittant le contact avec l'onde incidente, comme nous l'avons observé en ondes centimétriques, et emporter par conséquent une énergie non négligeable. Nous ne devons donc pas nier à priori l'influence des ondes évanescentes provoquées par les hautes fréquences spatiales.

X. Théorie électromagnétique de la diffusion superficielle

1. **Position exacte du problème.** — Considérons la diffusion superficielle comme

un problème de conditions aux limites à remplir par le champ électromagnétique sur la surface diffusante. Ce problème n'est pas essentiellement nouveau pour nous puisque nous avons traité au chapitre VII celui de la diffraction par un réseau de faible amplitude et de profil quelconque. Le spectre de Fourier de la surface du réseau était évidemment un spectre discret et l'énergie qu'il diffractait répartie également dans un spectre discontinu. Dans le problème présent la surface considérée n'est plus périodique, elle donnera donc un spectre continu de diffraction. Au cours de l'exposé de la théorie scalaire que nous avons voulu aussi bref que possible, nous l'avons représentée par une intégrale de Fourier sans nous attarder aux objections mathématiques qui surgissent. Or celles-ci apparaissent assez sérieuses. Le dioptré est supposé illimité et tout à fait irrégulier, c'est-à-dire que $f(x, y)$ a le caractère d'une fonction aléatoire quelconque. Il n'est pas évident qu'elle admette une moyenne, qu'elle soit sommable. La seule propriété que nous lui concédons est la dérivabilité, pour des raisons physiques. L'existence de sa transformée de Fourier n'en reste pas moins problématique. A supposer qu'elle existe, est-elle bornée, continue, dérivable ce dont nous avons besoin pour écrire les conditions aux limites ? Le théorème de Parseval-Plancherel s'applique-t-il ? Mais ces difficultés sont en fait artificielles et résultent du caractère trop abstrait du problème considéré. En pratique, le faisceau incident est toujours diaphragmé et le problème physique réel se pose ainsi : étant donné une surface S d'équation $z = f(x, y)$ séparant deux milieux et une onde incidente, diffractée par un diaphragme D et reçue par S , chercher le champ total $\vec{C}$ diffracté par S . La réponse s'obtient en écrivant que $\vec{C}$ obéit à l'équation de Helmholtz

$$\Delta \vec{C}(x, y, z) + k^2 N^2 \vec{C}(x, y, z) = 0$$

($N = 1$ ou n) et aux conditions aux limites sur S

$$(X.4) \quad \vec{n} \wedge (\vec{C}^i + \vec{C}) = 0, \quad \vec{n} \wedge (\vec{\mathcal{H}}^i + \vec{\mathcal{H}}) = 0.$$

La différence avec le cas d'ondes illimitées est que l'onde incidente n'est plus une onde plane uniforme, mais étalée en un spectre de diffraction par le diaphragme D . Par exemple, dans le plan $z = 0$, elle ne vaut plus $E^i \exp(-i k x \sin i)$ avec E^i constant, mais désormais $E^i(x, y) \exp(-i k x \sin i)$ avec une amplitude variable avec x et y . Le problème de la diffraction par S pose donc d'abord celui de la diffraction par D de façon à connaître $E^i(x, y)$. C'est un fait général en optique que l'impossibilité d'étudier rigoureusement un phénomène sans avoir à considérer le passé de l'onde incidente. Le dilemme résulte de ce que les calculs sont inextricables si l'on veut traiter rigoureusement le vrai problème physique, mais que des objections de principe s'élèvent si l'on veut simplifier les calculs en schématisant le problème, ainsi que nous allons nous en rendre compte.

En effet, dans les conditions aux limites (X.4), nous n'avons plus besoin de la transformée de Fourier de $f(x, y)$, mais de celle de $\vec{C}^i[x, y, f(x, y)]$. Or celle-ci existe et jouit de toutes les propriétés désirées de continuité et de dérivabilité puisque nous avons affaire à une fonction nécessairement continue, dérivable et de carré sommable (l'énergie totale incidente est finie). Nous voyons donc tomber toutes les difficultés de principe. Seulement, les calculs s'annoncent inextricables, même si nous donnons au diaphragme D une forme simple ! Aussi n'allons-nous pas

poursuivre dans cette voie rigoureuse. Nous nous proposons de revenir dans un travail ultérieur sur ces questions de formulation des conditions de passage compte tenu de la limitation du faisceau incident. Mais ici, nous avons uniquement pour but de lever les objections de principe et de bien préciser le sens des opérations mathématiques que nous effectuons.

Nous allons donc simplifier le problème, en réintroduisant fatalement une part d'arbitraire : nous négligerons la diffraction par le diaphragme D et admettrons, par conséquent, l'existence sur la surface S d'une pupille diffusante P, parfaitement délimitée d'après le principe de propagation rectiligne, où l'onde incidente est plane et uniforme. Hors de cette pupille, l'amplitude incidente sera considérée comme identiquement nulle. Nous appellerons fonction pupille $P(x, y)$ la fonction égale à 1 à l'intérieur de la pupille et identiquement nulle à l'extérieur de sorte que le champ incident sur S s'écrit $\mathcal{C}^i[x, y, f(x, y)] P(x, y)$. Naturellement $P(x, y)$ introduit une discontinuité sur la limite de la pupille. Mais on sait bien que physiquement, il n'en est rien. Le champ diffracté total est nécessairement nul sur la portion de S extérieure à la pupille. Si $\mathcal{C}(x, y, z)$ désigne sa valeur dans l'espace, il prend sur S la valeur $\mathcal{C}[x, y, f(x, y)] P(x, y)$. Ainsi, toutes les fonctions de x et y qui interviennent dans les conditions aux limites (X.1) sont à support borné et nous n'éprouvons plus de difficulté à leur associer leur transformée de Fourier.

Ceci étant dit, nous allons supposer la pupille P assez large pour pouvoir négliger sa diffraction et, pour simplifier, nous prendrons son aire comme unité. D'ailleurs il serait facile d'en tenir compte ultérieurement ; elle ne ferait qu'introduire une « modulation » des amplitudes que nous calculerons. Mais, encore une fois, ce n'est pas à ce problème de limitation que nous nous intéressons. Il nous suffit de savoir maintenant que les fonctions que nous considérons sont à support borné et que les relations (IX.4) et (IX.5) doivent être remplacées plus précisément par

$$f(x, y) P(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} a(\mu, \nu) \exp[-i(\mu x + \nu y)] d\mu d\nu,$$

$$a(\mu, \nu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_P f(x, y) \exp[i(\mu x + \nu y)] dx dy.$$

Le théorème de Parseval-Plancherel indique que

$$(X.2) \quad \iint_P f^2(x, y) dx dy = 4\pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu,$$

relation essentielle dont nous aurons besoin et qui n'existerait pas s'il n'y avait pas de pupille.

2. Solution de première approximation. — La validité des transformations de Fourier étant établie et leur sens exact précisé, le problème se trouve ramené à celui que nous avons déjà considéré au chapitre VII à ceci près que les spectres discrets sont remplacés par des spectres continus. Nous obtenions une infinité dénombrable d'équations linéaires ; nous en aurons une infinité indénombrable puisque c'est la fonction $E(\mu, \nu)$ définie par (IX.7) que nous devons déterminer. Mais l'essentiel des conclusions du chapitre VII subsiste par un passage à la limite immédiat.

Une première approximation sera obtenue en ne tenant compte que de la diffraction dans les ordres 1 et -1 par chaque fréquence spatiale, d'autant mieux valable que la fonction $a(\mu, \nu)$ est plus lentement variable.

Lorsque le champ électrique incident est normal au plan d'incidence, les champs réduits définis par $\vec{\varepsilon}(\mu, \nu) = \vec{E}(\mu, \nu)/E^i$ s'écrivent, d'après (VII.14)

$$(X.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x^r(\mu, \nu) &= \varepsilon_x^t(\mu, \nu) = -2i\nu a(\mu, \nu) \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\alpha}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \\ \varepsilon_y^r(\mu, \nu) &= \varepsilon_y^t(\mu, \nu) = 2ik a(\mu, \nu) \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\alpha^2 - \gamma^r \gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \\ \varepsilon_z^r(\mu, \nu) &= 2i\nu a(\mu, \nu) \gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t) \frac{\gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \\ \varepsilon_z^t(\mu, \nu) &= 2i\nu a(\mu, \nu) \frac{\gamma^r}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons remplacé $h_q \exp\left(i \frac{q}{|q|} \psi_q\right)$ par a_q , d'après (VII.16).

Par transposition de (VII.12), nous trouvons les champs réfléchi et réfracté réduits toujours définis par (II.4).

$$(X.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{0\perp}^r &= 2k^2 \gamma_0^r \left[\gamma_0^t z^2 + 4\pi^2 (n^2 - 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 - \gamma^r \gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right], \\ \varepsilon_{0\parallel}^r &= -8\pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta (\gamma^r - \gamma^t)}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} [n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha (\gamma^r + \gamma^t)] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu, \\ \varepsilon_{0\perp}^t &= \frac{k^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \left[z^2 - 8\pi^2 (\gamma_0^r - \gamma_0^t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 - \gamma^r \gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right], \\ \varepsilon_{0\parallel}^t &= -8\pi^2 k^2 \frac{n \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta (\gamma^r - \gamma^t)}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} [\alpha_0 - \gamma_0^r \alpha (\gamma^r - \gamma^t)] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu. \end{aligned} \right.$$

Dans toutes ces expressions, α , β , γ^r et γ^t sont des fonctions de μ et de ν déterminées par les relations (IX.9).

Lorsque le champ magnétique incident est normal au plan d'incidence les champs réduits $\zeta(\mu, \nu) = \vec{H}(\mu, \nu)/H^i$ sont, d'après (II.17),

$$(X.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_x^r(\mu, \nu) &= \zeta_x^t(\mu, \nu) = 2i\nu a(\mu, \nu) \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha (\gamma^r + \gamma^t)}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \end{aligned} \right.$$

$$(X.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_y^r(\mu, \nu) &= -2 i k a(\mu, \nu) \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha - \gamma_0^t [\gamma^t - \beta^2 (\gamma^r + \gamma^t)]}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \\ \zeta_y^t(\mu, \nu) &= -2 i k a(\mu, \nu) \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{n^2 \alpha_0 \alpha - \gamma_0^t [n^2 \gamma^r - \beta^2 (\gamma^r + \gamma^t)]}{n^2 \gamma^r - \gamma^t}, \\ \zeta_z^r(\mu, \nu) &= \zeta_z^t(\mu, \nu) = -2 i \nu a(\mu, \nu) \frac{\gamma_0^r \gamma_0^t (\gamma^r + \gamma^t)}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \end{aligned} \right.$$

et les champs réduits réfléchis et réfractés

$$(X.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta_{0\perp}^r &= 2 k^2 \frac{n^2 \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \left\{ \bar{z}^2 - 8 \pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^r - \gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} \left[\alpha_0 \alpha - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\gamma^r + \gamma^t) \frac{(\alpha^2 + \beta^2) n^2 \alpha_0^2 - (\beta^2 - \gamma^r \gamma^t) \gamma_0^t}{2 n^2 \gamma_0^t} \right] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right\}, \\ \zeta_{0\parallel}^r &= -8 \pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t} \times \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} \beta (\gamma^r - \gamma^t) \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha (\gamma^r + \gamma^t)}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu, \\ \zeta_{0\perp}^t &= k^2 \frac{n^2 - 1}{2} \frac{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t} \left\{ \bar{z}^2 - 8 \pi^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^r - \gamma^t}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} \left[\alpha_0 \alpha - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\gamma^r + \gamma^t) \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \alpha_0^2 - (\beta^2 - \gamma^r \gamma^t) \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right\}, \\ \zeta_{0\parallel}^t &= -4 \pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n} \times \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} \beta (\gamma^r - \gamma^t) \frac{n^2 \alpha_0 - \gamma_0^t \alpha (\gamma^r + \gamma^t)}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu. \end{aligned} \right.$$

Comparons ces résultats à ceux de la théorie scalaire (IX.8). Celle-ci, négligeant toute dépolarisation ou rotation du plan de polarisation, ne donne que les composantes $U_y : E_y$ avec $\rho_{0\perp}$ et $\tau_{0\perp}$ ou H_y avec $\rho'_{0\parallel}$ et $\tau'_{0\parallel}$ suivant le cas de polarisation. De plus, on se rend compte aisément, comme au chapitre III, que chaque expression (IX.8) ne représente que la partie principale (au facteur E^1 ou H^1 près) de ε_y ou ζ_y obtenue en remplaçant α , β et γ par α_0 , 0 et γ_0 . Il s'ensuit qu'elle n'est acceptable que pour la diffusion très proche, telle que μ et ν puissent être considérés comme très petits devant le nombre d'ondes. En particulier elle ne peut décrire les ondes évanescentes diffusées par les hautes fréquences spatiales. La théorie scalaire ne constitue donc qu'une première approximation, valable seulement pour la diffusion proche, de la théorie électromagnétique que nous venons d'exposer, sous une forme elle-même approchée d'ailleurs. Il convient donc de ne pas s'étonner des écarts observés avec l'expérience.

Les solutions (X.3) et (X.5) donnent une description plus précise des ondes diffusées. Celles-ci ont exactement la structure et les propriétés exposées aux chapitres III et IV. Quant aux ondes réfléchies et réfractées, les solutions (X.4) et (X.6) appellent quelques remarques. Tout d'abord, nous vérifions qu'elles donnent

les mêmes résultats (IX.6) que la théorie scalaire, par simple application du théorème de Parseval-Plancherel (X.2), à condition de négliger les défauts de H. F. et de remplacer encore α , β et γ par α_0 , 0 et γ_0 . Mais essayons maintenant de voir l'influence des H. F. Nous distinguerons deux sortes de carrés moyens, de B. F. et de H. F., définis de la façon suivante

$$(X.7) \quad \overline{z_1^2} = 4 \pi^2 \iint_{\text{B.F.}} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu, \quad \overline{z_2^2} = 4 \pi^2 \iint_{\text{H.F.}} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu,$$

les domaines B. F. et H. F. étant supposés entièrement disjoints, comme représentés sur la figure 23. Bien entendu, $\overline{z^2} = \overline{z_1^2} + \overline{z_2^2}$. De plus, nous supposons le domaine B. F. assez étroit pour pouvoir y assimiler α , β et γ à α_0 , 0 et γ_0 . Dans le domaine H. F., cela n'est évidemment plus possible et les γ sont imaginaires; nous les noterons, comme au chapitre IV, $\gamma = -i\nu$. Dans ces conditions,

$$(X.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{0\perp}^r &= -2 k^2 \gamma_0^r \left[\gamma_0^r \overline{z_1^2} - \gamma_0^t \overline{z_2^2} - i 4 \pi^2 (n^2 - 1) \times \right. \\ &\quad \left. \times \iint_{\text{H.F.}} \frac{\alpha^2 + v^r v^t}{n^2 v^r - v^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right], \\ \varepsilon_{0\parallel}^r &= -8 \pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \iint_{\text{H.F.}} \frac{\beta (v^r - v^t)}{n^2 v^r - v^t} \times \\ &\quad \times [n^2 \alpha_0 + i \gamma_0^t \alpha (v^r + v^t)] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu, \\ \varepsilon_{0\perp}^t &= -\frac{k^2}{2} (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 \left[\overline{z_1^2} - \overline{z_2^2} + i 8 \pi^2 (\gamma_0^r - \gamma_0^t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \iint_{\text{H.F.}} \frac{\alpha^2 + v^r v^t}{n^2 v^r - v^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right], \\ \varepsilon_{0\parallel}^t &= -8 \pi^2 k^2 \frac{n \gamma_0^r}{\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t} \iint_{\text{H.F.}} \frac{\beta (v^r - v^t)}{n^2 v^r - v^t} \times \\ &\quad \times [\alpha_0 + i \gamma_0^r \alpha (v^r + v^t)] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu. \end{aligned} \right.$$

Là encore, la théorie scalaire se trouve en défaut si les accidents de H. F. ne sont pas négligeables. En effet, au lieu de (IX.6), on a approximativement

$$(X.9) \quad \begin{aligned} (R_{\perp} - R_{0\perp})/R_{0\perp} &= -4 k^2 \gamma_0^r (\gamma_0^r \overline{z_1^2} - \gamma_0^t \overline{z_2^2}), \\ (T_{\perp} - T_{0\perp})/T_{0\perp} &= -k^2 (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 (\overline{z_1^2} - \overline{z_2^2}) \end{aligned}$$

et, de plus, s'introduit une dépolarisation : les ondes réfléchie et réfractée sont elliptiques. Nous avons déjà remarqué, au chapitre IV, ce phénomène lié à la présence d'ondes évanescentes et l'on pourra s'y reporter pour étudier la forme et l'orientation des vibrations elliptiques. Notons que même si $\overline{z_2^2}$ était négligeable, il n'en serait pas nécessairement de même des intégrales étendues au domaine H. F. qui figurent dans (X.8), car v^r et v^t sont des fonctions croissantes, en valeur absolue, avec μ et ν .

Par conséquent, la dépolarisation est due essentiellement aux H. F. et la baisse de pouvoir de réflexion ou de transmission aux B. F. et H. F. simultanément.

Les conclusions sont évidemment analogues dans le second cas de polarisation.

$$\begin{aligned}
 \zeta_{0\perp}^r &= -2k^2 \left\{ \gamma_0^r z_1^2 - \frac{n^2 \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \alpha_0^2} \left[z_2^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 8\pi^2 \iint_{\text{H.F.}} \frac{v^r - v^t}{n^2 v^r - v^t} \left[\alpha_0 \alpha + \mathbf{i} (v^r + v^t) \times \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{(\alpha^2 + \beta^2) n^2 \alpha_0^2 - (\beta^2 + v^r v^t) \gamma_0^t}{2 n^2 \gamma_0^t} \right] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right\}, \\
 \zeta_{0\parallel}^r &= -8\pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r (\gamma_0^r + \gamma_0^t)}{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t} \times \\
 &\quad \times \iint_{\text{H.F.}} \beta (v^r - v^t) \frac{n^2 \alpha_0 + \mathbf{i} \gamma_0^t \alpha (v^r + v^t)}{n^2 v^r - v^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu, \\
 \zeta_{0\perp}^t &= -\frac{k^2}{2} \left\{ (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 z_1^2 - (n^2 - 1) \frac{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t} \left[z_2^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 8\pi^2 \iint_{\text{H.F.}} \frac{v^r - v^t}{n^2 v^r - v^t} \left[\alpha_0 \alpha + \mathbf{i} (v^r + v^t) \times \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \alpha_0^2 - (\beta^2 + v^r v^t) \gamma_0^r \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \right] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right\}, \\
 \zeta_{0\parallel}^t &= -4\pi^2 k^2 \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{n} \times \\
 &\quad \times \iint_{\text{H.F.}} \beta (v^r - v^t) \frac{n^2 \alpha_0 + \mathbf{i} \gamma_0^t \alpha (v^r + v^t)}{n^2 v^r - v^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu,
 \end{aligned}
 \tag{X.10}$$

d'où, loin de l'incidence brewsterienne,

$$\begin{aligned}
 \frac{R_{\parallel} - R_{0\parallel}}{R_{0\parallel}} &= -4k^2 \left\{ \gamma_0^r z_1^2 - \frac{n^2 \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r - \alpha_0^2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[z_2^2 - 8\pi^2 \alpha_0 \iint_{\text{H.F.}} \frac{v^r - v^t}{n^2 v^r - v^t} \alpha |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right] \right\}, \\
 \frac{T_{\parallel} - T_{0\parallel}}{T_{0\parallel}} &= -k^2 \left\{ (\gamma_0^r + \gamma_0^t)^2 z_1^2 - (n^2 - 1) \frac{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t}{n^2 \gamma_0^r + \gamma_0^t} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[z_2^2 - 8\pi^2 \alpha_0 \iint_{\text{H.F.}} \frac{v^r - v^t}{n^2 v^r - v^t} \alpha |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{X.11}$$

À l'incidence brewsterienne, il subsiste un champ réfléchi

$$\begin{aligned}
 H_{0\perp B}^r &= -H^i k^2 \frac{n^2 - 1}{2} \left\{ z_2^2 \sqrt{n^2 + 1} - 4\pi^2 \iint_{\text{H.F.}} \frac{v^r - v^t}{n^2 v^r - v^t} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [2n\alpha - \mathbf{i} (v^r + v^t) (\alpha^2 - v^r v^t)] |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right\}, \\
 H_{0\parallel B}^r &= 4\pi^2 k^2 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \iint_{\text{H.F.}} \beta (v^r - v^t) \frac{n - \mathbf{i} \alpha (v^r + v^t)}{n^2 v^r - v^t} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu.
 \end{aligned}$$

Rappelons que les solutions (X.3), (X.5) et les conséquences que nous en avons

tirées ont été obtenues en supposant la fonction $a(\mu, \nu)$ lentement variable ce qui revient à admettre l'indépendance entre les différents réseaux harmoniques, d'où l'additivité des champs qu'ils diffractent dans le premier ordre. La diffusion ainsi calculée peut être qualifiée de diffusion primaire. Mais justement, pour des surfaces polies, la fonction $a(\mu, \nu)$ présente certainement, dans les basses fréquences spatiales, des variations importantes. Une solution plus précise doit être cherchée en tenant compte des interactions entre les réseaux harmoniques produisant ce que nous appellerons la diffusion secondaire.

3. Diffusion secondaire. — Certaines fréquences spatiales de la surface diffusante ayant une amplitude nettement prépondérante, la diffusion secondaire peut prendre une importance non négligeable. Malheureusement son calcul s'avère compliqué ; nous en avons déjà éprouvé la difficulté au chapitre VII, alors qu'il s'agissait seulement d'un réseau à sillons normaux au plan d'incidence. Aussi, dans notre recherche d'une meilleure solution, limiterons-nous notre ambition au calcul de la diffusion dans le plan d'incidence. C'est d'ailleurs là qu'elle est la plus forte et qu'on l'observe généralement. Elle n'y dépend que des composantes $a(\mu, 0)$ du spectre de Fourier des défauts du dioptré. Les interactions que nous cherchons s'exercent essentiellement entre ces composantes. Tout se passe donc comme si nous considérions une surface cylindrique à génératrices normales au plan d'incidence. La solution se déduira par conséquent, par un passage à la limite, de la solution relative au réseau (VII.18) ou (VII.21).

$$\begin{aligned}
 \epsilon^r(\mu, 0) &= 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma^r + \gamma^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left\{ a(\mu, 0) + \right. \\
 &\quad \left. + i k \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma^r(\mu') + \gamma^t(\mu') - \gamma^t(\mu)] a(\mu', 0) a^*(\mu' - \mu, 0) d\mu' \right\}, \\
 \epsilon^t(\mu, 0) &= 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma^r + \gamma^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} \left\{ a(\mu, 0) + \right. \\
 &\quad \left. + i k \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma^r(\mu') + \gamma^t(\mu') - \gamma^r(\mu)] a(\mu', 0) a^*(\mu' - \mu, 0) d\mu' \right\}
 \end{aligned}
 \tag{X.12}$$

si le champ électrique incident est normal au plan d'incidence ou, dans le cas contraire,

$$\begin{aligned}
 \zeta^r(\mu, 0) &= -2 i k \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} \left[(n^2 \alpha_0 \alpha - \gamma_0^t \gamma^t) a(\mu, 0) + \right. \\
 &\quad \left. + i k \int_{-\infty}^{\infty} B^r(\mu, \mu') a(\mu', 0) a^*(\mu' - \mu, 0) d\mu' \right], \\
 \zeta^t(\mu, 0) &= -2 i k \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t} \frac{1}{n^2 \gamma^r - \gamma^t} \left[(\alpha_0 \alpha - \gamma_0^t \gamma^r) a(\mu, 0) + \right. \\
 &\quad \left. + i k \int_{-\infty}^{\infty} B^t(\mu, \mu') a(\mu', 0) a^*(\mu' - \mu, 0) d\mu' \right]
 \end{aligned}
 \tag{X.13}$$

avec

$$B^r(\mu, \mu') = n^2 \gamma_0^t +$$

$$+ \frac{[\gamma^r(\mu') + \gamma^t(\mu')] [n^2 \alpha_0 \alpha^2(\mu') \alpha + \gamma_0^t \gamma^r(\mu') \gamma^t(\mu') \gamma^t] - n^2 \alpha(\mu') (\alpha \gamma_0^t + \alpha_0 \gamma^t)}{\alpha^2(\mu') - \gamma^r(\mu') \gamma^t(\mu')}$$

$$B^t(\mu, \mu') = \gamma_0^t + \frac{[\gamma^r(\mu') + \gamma^t(\mu')] [\alpha_0 \alpha^2(\mu') \alpha + \gamma_0^t \gamma^r(\mu') \gamma^t(\mu') \gamma^r] - \alpha(\mu') (\alpha \gamma_0^t + \alpha_0 \gamma^r)}{\alpha^2(\mu') - \gamma^r(\mu') \gamma^t(\mu')}.$$

Chaque fois que nous ne le précisons pas, il s'agit de $\alpha(\mu)$, $\gamma^r(\mu, 0)$ et $\gamma^t(\mu, 0)$ et nous avons abrégé les $\gamma(\mu', 0)$ en $\gamma(\mu')$.

Si les B. F. existaient seules, nous pourrions assimiler les $\gamma(\mu)$ ou $\gamma(\mu')$ à γ_0 et les intégrales ci-dessus se réduiraient, à un facteur constant près, à $C(\mu)$, fonction d'autocorrélation de $a(\mu, 0)$,

$$C(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mu', 0) a^*(\mu' - \mu, 0) d\mu'.$$

Les solutions (X.11) et (X.12) se simplifieraient en

$$\epsilon^r(\mu, 0) = 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} [a(\mu, 0) + i k \gamma_0^r C(\mu)],$$

$$\epsilon^t(\mu, 0) = 2 i k \gamma_0^r \frac{\gamma_0^r + \gamma_0^t}{\gamma_0^r - \gamma_0^t} [a(\mu, 0) + i k \gamma_0^t C(\mu)],$$

$$\zeta^r(\mu, 0) = -2 i k \frac{(n^2 - 1) \gamma_0^r}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t)^2} [(n^2 \alpha_0^2 - \gamma_0^t{}^2) a(\mu, 0) + i k B^r(0, 0) C(\mu)],$$

$$\zeta^t(\mu, 0) = -2 i k \frac{(n^2 - 1) n^2 \gamma_0^r}{(n^2 \gamma_0^r - \gamma_0^t)^2} [(\alpha_0^2 - \gamma_0^r \gamma_0^t) a(\mu, 0) + i k B^t(0, 0) C(\mu)].$$

On conçoit aisément que la fonction d'autocorrélation $C(\mu)$ puisse ne pas être négligeable devant $a(\mu, 0)/k$ de sorte que la correction soit importante. Celle-ci est proportionnelle au nombre d'ondes.

Mais de plus, les H. F. peuvent apporter une nouvelle contribution à cette correction, plus difficile à estimer car les γ et α ne sont plus assimilables à γ_0 et α_0 , mais sont au contraire des fonctions croissantes de μ/k , en valeur absolue. Les intégrales figurant dans (X.12) et (X.13), étendues au domaine H. F., peuvent donc introduire des termes en puissances négatives de k .

Par conséquent, la diffusion secondaire résultant des interactions entre les dipôles induits sur la surface S apporte plusieurs corrections, les unes en k , les autres en k^0 , k^{-1} , ... et il est bien difficile à priori d'en connaître le signe et l'importance. Aussi ne faut-il pas s'étonner d'observer d'importants écarts entre l'expérience et nos calculs antérieurs élémentaires, si la surface diffusante n'est pas bien polie.

Enfin, n'oublions pas que d'autres causes que la diffraction peuvent contribuer à la diffusion et que celle-ci n'est pas toujours uniquement superficielle. Il est bien connu que les verres optiques par exemple subissent, sous l'influence du gaz carbonique et de l'humidité atmosphériques, une altération chimique : libération de sels, précipitation de silice gélatineuse, etc., de sorte qu'une diffusion volumique s'ajoute à la diffusion superficielle. Les techniques récentes de microscopie électronique et de fluorescence en rayons X ont permis d'observer ces altérations [52, 53].

4. Diffusion par les réseaux. — Au chapitre VIII, nous avons vu comment un défaut périodique d'un réseau provoque l'apparition de spectres satellites. Nous avons peu de choses à ajouter pour considérer maintenant le cas d'un défaut aperiodique. Nous conserverons les mêmes notations et supposons que le défaut $g(x)$ est représentable par une intégrale de Fourier

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(K') \exp(-i K' x) dK'$$

ne comportant que des basses fréquences spatiales.

Au spectre discontinu de diffraction du réseau se superpose donc un spectre continu de diffusion. Le champ total diffracté s'écrit donc

$$\vec{C} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \vec{E}_p \exp[-i k (\alpha_p x + \gamma_p z)] + \\ + \sum_p \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_p(K') \exp\left\{-i k \left[\left(\alpha_p + \frac{K'}{k}\right) x + \gamma_p(K') z\right]\right\} dK',$$

avec

$$[\gamma_p^r(K')]^2 = 1 - \left(\alpha_p + \frac{K'}{k}\right)^2, \quad [\gamma_p^t(K')]^2 = n^2 - \left(\alpha_p + \frac{K'}{k}\right)^2.$$

Par transposition des solutions (VIII.4) et (VIII.6), on obtient

$$E_p^r(K') = E_{p0}^r i k \gamma_0^r b(K'), \quad E_p^t(K') = E_{p0}^t i k \gamma_0^t b(K')$$

ou deux expressions analogues en remplaçant E par H .

Quant aux solutions (VIII.5) et (VIII.7) donnant les champs diffractés principaux, elles restent valables.

5. Conséquences et applications. — *1. Effets nuisibles.* — La diffusion superficielle se manifeste par de nombreux effets nuisibles : déperdition d'énergie, lumière parasite, mauvaise qualité des images, baisse de contraste et de pouvoir séparateur dans les instruments d'optique. Ces effets sont bien connus. Cependant on ne se doute pas toujours de leur importance. Ainsi, on sait depuis longtemps que les formules de Fresnel donnant les pouvoirs de réflexion et de transmission d'un dioptré plan se vérifient fort mal, même avec une surface optique polie. Pour l'expliquer on invoque fréquemment l'existence d'une couche de passage, légèrement absorbante et d'indice différent, donc une cause d'origine physicochimique. Certes cette notion comporte une part de vérité et nous avons déjà évoqué les phénomènes d'altération chimique qui la justifient dans une certaine mesure. Mais les irrégularités géométriques de la surface jouent, pour les polis moyens, un rôle certainement beaucoup plus néfaste. Si l'on a tendance à sous-estimer ce rôle, c'est peut-être par suite d'une confusion entre des conditions différentes, suivant que l'on s'intéresse à l'aspect qualitatif, visuel des phénomènes ou à l'aspect quantitatif, photométrique. Pour qu'un dioptré produise des images acceptables, il faut, d'après la règle bien connue de Lord Rayleigh, que les déformations des surfaces d'onde restent inférieures à $\lambda/4$, donc que les irrégularités du dioptré n'excèdent pas en amplitude $\lambda/8$. Cette condition est effectivement suffisante pour obtenir par exemple la réflexion spéculaire. Mais, en supposant même que l'écart quadratique moyen soit égal au quart de cette valeur extrême, soit $\lambda/32$, la formule (IX.6) indique que $R = 0,85 R_0$. On voit que lorsque l'ouvrier opticien

arrête le polissage quand la surface produit la réflexion spéculaire, cette surface est loin d'être idéale au point de vue photométrique.

Cette remarque nous fait craindre des erreurs importantes dans les conclusions que l'on tire de l'étude expérimentale des couches minces. Il nous semble téméraire d'assimiler un dépôt obtenu par évaporation dans le vide à une lame à faces planes et parallèles, recouvrant uniformément le support et de déduire ensuite indices et conductibilités des mesures de déphasages et de pouvoirs de réflexion. Les couches minces ont plutôt une structure granulaire et même si l'on réussit à leur donner une certaine uniformité statistique, les microaccidents de H. F. restent certainement très importants et peuvent avoir, nous l'avons signalé, des conséquences néfastes.

D'autre part, si une surface polie obéit aussi mal que nous l'avons vu aux lois déduites de la théorie scalaire, que penser des préparations microscopiques examinées au microscope à contraste de phase ? Nous avons déjà noté, au chapitre III, comment l'objet de phase n'existe pratiquement pas. La théorie classique élémentaire du contraste de phase qui ne tient compte que des fluctuations de phase introduites par l'objet ne constitue donc, très probablement, qu'une première approximation assez grossière.

2. *Moyens d'investigation.* — Nous n'insisterons pas davantage sur les effets nuisibles de la diffusion superficielle. Envisageons celle-ci comme un moyen de connaissance de l'état géométrique d'une surface irrégulière. Les lois de la diffusion ne sont simples que si les défauts de planéité sont très nettement inférieurs à la longueur d'onde. Il s'ensuit que les mesures ne seront exploitables que si l'on opère dans un domaine de longueurs d'onde réalisant cette condition. Pour les polis optiques moyens, par exemple, on a intérêt à utiliser l'infrarouge plutôt que la lumière visible. Dans toute la suite nous supposons cette condition réalisée.

a) *Mesure du défaut quadratique moyen de planéité.* — Si les H. F. peuvent être négligés, les lois (IX.6) permettent une estimation de $\overline{z^2}$ donc du défaut quadratique moyen de planéité. Il suffit de mesurer le pouvoir de réflexion en polarisant le champ électrique incident normalement au plan d'incidence. Signalons cependant une difficulté de cette mesure : la fente d'entrée F du récepteur photométrique doit être assez large pour recueillir la totalité du flux réfléchi qui, auparavant, avait été diffracté par le diaphragme D (fig. 14). Mais alors, elle capte aussi une partie de l'énergie diffusée. Le flux mesuré Φ_m est donc $\Phi_m = \Phi^r + \Phi^d$, somme du flux régulièrement réfléchi Φ^r et du flux diffusé Φ^d . Or

$$\Phi^r = I^1 \gamma_0^r R = I^1 \gamma_0^r R_0 (1 - 4k^2 \gamma_0^r \overline{z^2})$$

et Φ^d s'exprime par (IX.13) que nous pouvons encore écrire

$$\Phi^d = I^1 16 \pi^2 k^2 \gamma_0^r R_0 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu$$

avec les limites d'intégration

$$(X.14) \quad \mu_1 = k \gamma_0^r \alpha'_1, \quad \mu_2 = k \gamma_0^r \alpha'_2, \quad \nu_1 = k \beta'_1, \quad \nu_2 = k \beta'_2,$$

si $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1$ et β'_2 sont les limites angulaires de la fente réceptrice.

Donc

$$(X.15) \quad \Phi_m = I^1 \gamma_0^r R_0 \left\{ 1 - 4 k^2 \gamma_0^{r^2} \left[\overline{z^2} - 4 \pi^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \right] \right\}.$$

Or

$$\overline{z^2} = 4 \pi^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu.$$

Par conséquent l'erreur relative commise sur $\overline{z^2}$ est

$$\Delta \overline{z^2} / \overline{z^2} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu \bigg/ \int \int_{-\infty}^{\infty} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu,$$

erreur d'autant plus grande que le domaine déterminé par μ_1 , μ_2 , ν_1 et ν_2 est plus grand. Or cette ouverture, d'après (X.13), est proportionnelle au nombre d'ondes. Par conséquent, pour réduire l'erreur il importe d'expérimenter avec de grandes longueurs d'onde. Voici donc encore une raison supplémentaire d'opérer avec des ondes longues.

Si les défauts de H. F. ne sont pas négligeables, ce sont les lois (X.9) qu'il convient d'utiliser. On pourrait concevoir une mesure successive des facteurs de réflexion et de transmission qui permettrait ensuite la détermination séparée de $\overline{z_1^2}$ et de $\overline{z_2^2}$ respectivement carrés moyens des défauts de B. F. et de H. F., définis par (X.7). Mais la mesure d'un pouvoir de transmission est toujours chose délicate. On peut s'en dispenser. En effet, supposons que l'on mesure l'ensemble du flux régulièrement réfléchi et du flux diffusé à l'infini en utilisant un récepteur photométrique à ouverture large. Alors, pratiquement

$$4 \pi^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \int_{\nu_1}^{\nu_2} |a(\mu, \nu)|^2 d\mu d\nu = \overline{z^2}$$

et, d'après (X.15),

$$\Phi_m = I^1 \gamma_0^r R_0 (1 - 4 k^2 \gamma_0^{r^2} \overline{z_2^2})$$

et $\overline{z_2^2}$ est ainsi déterminé.

Une seconde mesure opérée avec une ouverture étroite permet ensuite de déterminer $\overline{z_1^2}$.

Bien entendu, ces mesures exigent une haute précision photométrique et l'utilisation, de préférence, d'une méthode différentielle de comparaison de l'échantillon étudié à une surface très bien polie que l'on puisse considérer comme étalon.

b) *Analyse de Fourier des défauts de surface.* — Cette analyse découle des lois (X.3) et (X.5). Si la surface présente une suffisante isotropie statistique de sorte que $a(\mu, \nu)$ soit en réalité une seule fonction de $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, il suffit d'observer la diffusion dans le plan d'incidence, ce qui, du point de vue mécanique, apporte une simplification appréciable. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet, les conditions à réaliser pour cette étude expérimentale ayant été discutées en détail au chapitre IX.

En conclusion, nous voyons que la diffusion superficielle apporte des moyens intéressants d'exploration des surfaces irrégulières. Les difficultés expérimentales sont indéniables et les mesures exigent un appareillage de précision, très sensible, spécialement conçu pour la diffusion. Mais elles peuvent compléter utilement les méthodes classiques d'observation interférométrique ou microscopique, en permettant une estimation chiffrée des défauts de planéité.

CONCLUSION

Ayant reconnu l'insuffisance des théories scalaires de la diffraction, nous avons tenté l'élaboration d'une théorie vectorielle tenant compte des conditions aux limites imposées au champ électromagnétique. La diffraction par un réseau a été mise rigoureusement en équations. Le système infini obtenu ne peut en général être résolu approximativement qu'à l'aide d'un calculateur électronique, à mémoire assez importante. Nous avons cependant recherché une solution littérale dans le cas où l'amplitude du réseau est petite par rapport à la longueur d'onde. Le réseau à profil sinusoïdal nous a servi d'intermédiaire dans cette étude et nous a permis d'analyser la structure des ondes diffractées. La considération d'un tel profil était naturelle, l'analyse harmonique jouant dans tous les phénomènes de diffraction un rôle privilégié, qu'il n'est plus nécessaire de souligner. Par généralisation nous avons étudié la diffusion par des surfaces irrégulières quelconques.

Les difficultés de cette théorie électromagnétique sont énormes. Les résultats littéraires n'ont pu être obtenus qu'au prix d'hypothèses restrictives. Nos conclusions sont donc limitées, incomplètes, approximatives. Nous espérons du moins avoir montré l'exacte formulation des problèmes et indiqué un certain nombre de méthodes de résolution.

A maintes occasions, au cours de cette étude consacrée essentiellement aux défauts de planéité, nous avons souligné l'insuffisance de la conception selon laquelle ces défauts ne provoqueraient que des fluctuations de phase dans les surfaces d'onde réfléchies ou transmises. Du fait de l'orientation variable des facettes d'une surface irrégulière, des fluctuations d'amplitude interviennent également et seule une expression exacte des conditions aux limites permet de prévoir correctement phase et amplitude de l'onde diffractée.

Nous avons voulu, de plus, mettre l'accent sur la distance qui sépare bien souvent la réalité physique des schémas trop simplifiés tels que dioptré parfaitement plan, onde plane illimitée, etc. La diffusion constitue une manifestation de la différence entre une surface réelle et un plan et nous avons vu que son influence est plus importante qu'on ne le suppose habituellement. Nous avons enfin montré comment les mesures de diffusion apportent un utile moyen de connaissance des défauts de planéité d'une surface.

A l'issue de ce travail je tiens à remercier la Direction Générale des Affaires Culturelles et Techniques et, tout particulièrement, M^r Basdevant qui a encouragé le développement de la recherche au sein de la Mission Culturelle Française à Beyrouth. A la tête de celle-ci, M^r le Conseiller J. Lequiller a toujours manifesté une grande compréhension des besoins des laboratoires dont j'ai la charge au Centre d'Etudes et de Recherches Mathématiques et Physiques et je lui sais gré de l'appui qu'il a bien voulu m'accorder constamment à ce sujet.

Le Professeur J. Lecomte a bien voulu se charger de la présentation à l'Académie des Sciences de quelques notes antérieures à ce mémoire. Je l'en remercie vivement.

Je dois à la Compagnie de Saint-Gobain un précieux concours. Le matériel qu'elle m'a confié m'a permis l'étude expérimentale de la diffusion. J'exprime en particulier ma gratitude à M^r Acloque, chef du service de recherche fondamentale.

Sa grande compétence aussi bien dans le domaine théorique que dans celui de la technique de travail du verre m'a valu de très fructueuses discussions et d'intéressantes suggestions.

Lors de mes passages à Paris, l'Institut d'Optique me fut toujours largement ouvert. J'en remercie son directeur, le Professeur P. Fleury, qui a bien voulu mettre à ma disposition plusieurs de ses services.

Je dois à l'obligeance de M^{rs} J. Demarcq et A. Marraud la fabrication des échantillons diversement polis et leurs photographies, prises au microscope électronique de l'Institut d'Optique. Je les remercie de leur contribution à ce travail.

M^{rs} R. Petit, R. Prat et A. Wirgin m'ont spontanément fait part de leurs travaux et communiqué leurs articles avant même leur parution. Je leur sais gré de la franche et cordiale correspondance qui s'est ainsi établie entre nous et des enrichissants échanges de vues qu'elle a permis.

Enfin, ma reconnaissance va tout spécialement au Professeur Maréchal qui, en me confiant cette étude, m'offrait un sujet déjà bien cerné et orienté par ses travaux antérieurs ; la nécessité d'une théorie électromagnétique avec conditions aux limites dans tous les phénomènes de diffraction ou de diffusion étant démontrée, ma voie s'est trouvée toute tracée et il a su me communiquer l'ardeur et l'enthousiasme nécessaires pour la suivre. Malgré la lourde charge de ses hautes fonctions, je n'ai cessé de rencontrer en lui un interlocuteur attentif aux progrès et aux difficultés de mon travail et de recevoir de sa part de précieux encouragements et de judicieux conseils. Je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude.

RÉFÉRENCES

- [1] R. P. MADDEN & J. STRONG, *Classical optics*, éd. W. H. Freeman and C^o, San Francisco, 1958, p. 597.
- [2] A. MARÉCHAL & G. W. STROKE, *C. r. Ac. Sc.*, t. **249**, 1959, p. 2042.
- [3] J. H. ROHRBAUGH, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **48**, 1958, p. 704.
- [4] J.-M. MUNIER, J. CLAUDEL, E. DÉCAMPS & A. HADNI, *Rev. Opt.*, t. **5**, 1962, p. 245.
- [5] C. JANOT & A. HADNI, *Jl Phys.* [8], t. **23**, 1962, p. 152 et t. **24**, 1963, p. 1073.
- [6] G. W. STROKE, *Phys. Letters*, t. **5**, 1963, p. 45.
- [7] W. C. MEECHAM, *Jl appl. Physics*, t. **27**, 1956, p. 361.
- [8] R. PETIT, *Rev. Opt.*, t. **42**, 1963, p. 263 ; *C. r. Ac. Sc.*, t. **257**, 1963, p. 2018.
- [9] P. BOUSQUET, *C. r. Ac. Sc.*, t. **256**, 1963, p. 3422 et t. **257**, 1963, p. 80.
- [10] J. PAVAGEAU, *C. r. Ac. Sc.*, t. **256**, 1963, p. 390.
- [11] Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, t. **14**, 1907, p. 350.
- [12] C. SCHAEFFER & F. REICHE, *Ann. Physik*, t. **35**, 1911, p. 817.
- [13] V. TWERSKY, *Ire trans. on antennas and propag.*, AP4, 1956 et AP5, 1957.
- [14] Lord RAYLEIGH, *Proc. Royal Soc.*, t. **79**, 1907, p. 399.
- [15] G. W. STROKE, *Rev. Opt.*, t. **39**, 1960, p. 350.
- [16] B. A. LIPPMAN, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **43**, 1953, p. 408.
- [17] J. B. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1888, p. 149.
- [18] F. RIESZ, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, éd. Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 7.
- [19] G. W. HILL, *Acta Math.*, t. **8**, 1886, p. 1.
- [20] H. POINCARÉ, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. **14**, 1886, p. 77.
- [21] VON KOCH, *C. r. Ac. Sc.*, t. **120**, 1895, p. 144.
- [22] E. SCHMIDT, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **25**, 1908, p. 53.
- [23] H. TOEPLITZ, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **28**, 1909, p. 88.
- [24] A. WINTNER, *Mat. Zeits.*, t. **24**, 1925, p. 266.
- [25] G. BEAUVAIS, Thèse, Paris, 1963.
- [26] P. ACLOQUE & C. GUILLEMET, *C. r. Ac. Sc.*, t. **250**, 1960, p. 4328.
- [27] M. SCHAEFFER & G. TORALDO DI FRANCA, *Nuovo Cim.*, t. **6**, 1949, p. 125.
- [28] A. ANGOT, *Compléments de mathématiques*, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1957, p. 164.
- [29] H. KOTTERITSCH, *Zeits. Math. Physik*, t. **15**, 1870, p. 229.

- [30] G. BRUHAT, *Optique*, éd. Masson, Paris, 1947, p. 352.
- [31] E. HAGEN & H. RUBENS, *Ann. Physik*, t. **11**, 1903, p. 873.
- [32] J. PAVAGEAU, *C. r. Ac. Sc.*, t. **258**, 1964, p. 5828.
- [33] A. MARÉCHAL & M. FRANÇON, *Diffraction, structure des images*, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1960.
- [34] M. BORN & E. WOLF, *Principles of optics*, éd. Pergamon Press, New York, 1959, p. 654.
- [35] J. PAVAGEAU, *Rev. Opt.*, t. **43**, 1964, p. 1.
- [36] J. PAVAGEAU, *Rev. Opt.*, t. **42**, 1963, p. 451.
- [37] R. PETIT, *C. r. Ac. Sc.*, t. **258**, 1964, p. 1429.
- [38] A.-M. CAMUS, M. FRANÇON, E. INGELSTAM & A. MARÉCHAL, *Rev. Opt.*, t. **30**, 1951, p. 121.
- [39] M. GOUY, *C. r. Ac. Sc.*, t. **98**, 1884, p. 972.
- [40] A. LAFAY, Thèse, Paris, 1898.
- [41] A. DE GRAMONT, *Rev. Opt.*, t. **10**, 1931, p. 105.
- [42] J. URBANEK, *Rev. Opt.*, t. **9**, 1930, p. 247.
- [43] W. E. K. MIDDLETON & F. D. SMITH, *Canad. Jl Res.*, t. **27**, 1949, p. 151.
- [44] W. E. K. MIDDLETON, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **50**, 1960, p. 745.
- [45] A. MARÉCHAL, *Opt. Acta*, t. **5**, 1958, p. 70.
- [46] R. PRAT, *Rev. Opt.*, t. **43**, 1964, p. 115.
- [47] H. E. BENNETT & J. O. PORTEUS, *Jl opt. Soc. Amer.*, t. **51**, 1961, p. 127.
- [48] P. BOUSQUET, *Jl Phys.* [8], t. **24**, 1963, p. 161.
- [49] J. TEXEREAU, *Contraste de phase et contraste par interférences*, éd. *Rev. Opt.*, Paris, 1952, p. 172.
- [50] B. LYOT, *C. r. Ac. Sc.*, t. **222**, 1946, p. 765.
- [51] F. ZERNIKE, *Month. Not. R. astro. Soc.*, 1934, p. 377.
- [52] N. NAVEZ & C. SELLA, *C. r. Ac. Sc.*, t. **250**, 1960, p. 4325 et t. **253**, 1961, p. 1674.
- [53] C. LEGRAND, M. NAVEZ & H. MERX, *C. r. Ac. Sc.*, t. **253**, 1961, p. 1439.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté :

« Interférométrie d'intensité. »

Vu et approuvé :

Paris, le 24 novembre 1964

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

M. JULIA	T Etudes des Moléculaires complexes.	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay).
LENDER	T Biol. Animale SPCN (Orsay).	KAHANE	T Mathématiques (Orsay).
MAGAT	T Physico-Chimie des radioéléments.	SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines.
Mlle QUINTIN	T Electrochimie.	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay).
MONOD	T Chimie du métabolisme.	THIRY	T Mécanique céleste.
BENOIT	T Physiol. animale (Orsay).	ABELES	T Physique SPCN.
DE POSSEL	T Analyse numérique.	AMAT	T Physique PCB.
CHARLOT	T Chimie analytique.	AUBOIN	T Géologie.
LEMEE	T Ecologie Vég. (Orsay).	M ^{me} BENOIT-GUEU-TAL	T Phys. Nucléaire et radioactivité (Orsay).
GUERIN	T Chimie MPC (Orsay).	BOUGIS	T Biologie marine (Villefranch Mer).
CHATELET M.	T Chimie PCB.	BRUHAT	T Mathématiques MPC.
JEAN	T Physique Nucl. (Orsay).	BRUNN	T Géologie historique (Orsay).
MATTLER	T Physique SPCN.	CHABBAL	T Physique MGP (Orsay).
BERGERARD	T Zoologie (Orsay).	DEHEVELS	T Mathématique Propé.
BERTEIN	T Electronique (Orsay).	D'ESPAGNAT	T Physique théorique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T Radiochimie.	FURON	T Géologie SPCN.
M ^{me} COUTURE	T Thermo. et Méca. Physique.	M ^{me} GANS	T Génétique.
ELLENBERGER	T Géologie des grandes régions du globe.	GENEVES	T Biologie végétale PCB.
FRANC	T Biologie animale PCB.	GUILBERT	T Physique (CUS Orléans).
SCHNELL	T Botanique tropicale.	HUPE	T Pétrographie.
STOLKOWSKI	T Physiologie végétale.	HOLLANDE	T Biologie générale.
ACHER	T Chimie Biologique.	LIONS	T Analyse numérique.
BAUDOIN	T Biologie animale PCB.	MAITTE	T Chimie PCB.
BEAUMONT	T Biologie animale SPCN.	MEYER	T Physique propédeutique.
BEAUMONT	T Géophysique-ionosphère.	NICOLAS	T Géologie appliquée.
BOURREAU	T Botanique.	PANIGEL	T Biologie générale.
CURIE D.	T Physique MGP.	RAVIER	T Pétrographie.
DURAND-DELGA ..	T Géologie.	ROSEAU	T Méca. théor. des fluides.
FREON	T Chimie organique (Orsay).	ROUBINE	T Electronique.
HELLER	T Physiol. végétale.	SILBER	T Chimie PCB.
TORTRAT	T Calcul des Probabilités.	UEBERSFELD	T Electronique.
CAILLEUX	T Géologie (SPCN).	YVON	T Théories Physiques.
MAGNAN	T Physique SPCN.	HERVE	T Mathématiques.
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appli. à la chimie Théor. et à la Phys. Nucléaire.	NERON	T Mathémat. MPC (Orsay).
Mlle FOURCROY ...	T Biologie végét. SPCN.	M ^{me} PECKER-WIMEL	T Astrophysique.
M ^{me} CHOQUET-BRUHAT	T Mécan. Analytique et Méca. céleste.	BALKANSKY	T Physique MPC.
Mlle VEIL	T Physiologie générale.	LE CORRE	T Electricité.
LWOFF	T Microbiologie.	DELcroix	T Physique théorique (Orsay).
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expér.	GOURDIN	T Phys. Théor. des Hautes-Energies (Orsay).
LACOMBE	T Métallurgie des métaux Nucléaires (Orsay).	LEHMANN	T Phys. Exp. des Hautes Energies (Orsay).
BROCHARD	T Physique PCB (Orsay).	NATAF	T Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
CABANNES	T Mécanique générale.	ECHALIER	T Biologie animale PCB.
LESIEUR	T Mathématiques I (Orsay).	BARRAUD	T Physiologie cellulaire.
MAZET	T Méca. générale (Orsay).	LIORÉ	T Physiologie végét. Orsay.
CAIRE	T Géographie phys. et Géol. Dynamique.	DARS	T Géologie struc. et Géol. appliquée.
COMOLET	T Mécanique des Fluides.	CAMEFORT	T Botanique (agrégation).
CORABOEUF	T Physiol. animale (Orsay).	VICHNIEWSKY	T Mécanique industrielle.
DELLOUE	T Physique de l'exosphère.	BLAQUIÈRE	T Electronique (Orsay).
GORENFLOT	T Botanique II (Orsay).	ARNOUS	T Physique théorique.
HOUILLOIN	T Biologie animale PCB.	TATIBOUET	T Chimie (CSU Orléans).
JULLIEN J.	T Chimie SPCN (Orsay).	MALLIAVIN	T Mathématique propé. (Orsay).
MALGRANGE	T Technique Math. de la Physique (Orsay).	GAUDEMAR	T Chimie Propé.
OLIVIER	T Antropologie.	PÉREZ Y JORBA	T Phys. Exp. des Hautes énergies (Orsay).
NOZERAN	T Botanique II (Orsay).	DAVID	T Chimie (Agrég. Orsay).
BLANC-LAPIERRE ..	T Phys. ENS (Orsay).	BROUSSE	T Mécanique théorique.
		RÖSCH	T Astronomie.

Le Secrétaire Général..... R. POULLAIN.

